



Data: 15/04/2009
Semestre:
Curso: Engenharia de Computação
Disciplina: Álgebra Linear
Prova: I

1. 4 pts. Dado as matrizes:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- (a) Encontrar: $\det \underline{\underline{A}}$ e $\det \underline{\underline{B}}$.
- (b) Encontrar as matrizes adjuntas: $\underline{\underline{A}}^*$ e $\underline{\underline{B}}^*$.
- (c) Encontrar os inversos: $\underline{\underline{A}}^{-1}$ e $\underline{\underline{B}}^{-1}$.
- (d) Encontrar os determinantes dos inversos: $\det (\underline{\underline{A}}^{-1})$ e $\det (\underline{\underline{B}}^{-1})$.
- (e) Encontrar os produtos: $\underline{\underline{A}} \underline{\underline{B}}$ e $\underline{\underline{B}} \underline{\underline{A}}$.
- (f) Mostre que em geral vale por matrizes do mesmo ordem: $(\underline{\underline{A}} \underline{\underline{B}})^{-1} = \underline{\underline{B}}^{-1} \underline{\underline{A}}^{-1}$.
- (g) Encontrar o inverso do produto: $(\underline{\underline{A}} \underline{\underline{B}})^{-1}$.
- (h) Encontrar o inverso do produto: $(\underline{\underline{B}} \underline{\underline{A}})^{-1}$.

Solution:

(a)

$$\det \underline{\underline{A}} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

$$\det \underline{\underline{B}} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 2 \cdot 3 = -6$$

(b) Para $\underline{\underline{A}}$:

$$D_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \quad D_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad D_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1$$

$$D_{21} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \quad D_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad D_{23} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$D_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \quad D_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad D_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Assim:

$$A_{11} = 3 \quad A_{12} = 1 \quad A_{13} = -1$$

$$A_{21} = 2 \quad A_{22} = 1 \quad A_{23} = 0$$

$$A_{31} = -2 \quad A_{32} = -1 \quad A_{33} = 1$$

Ou seja:

$$\underline{\underline{A}}^* = (A_{ji}) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por $\underline{\underline{B}}$ ser diagonal:

$$D_{ij} = A_{ij} = 0, \quad i \neq j$$



$$D_{11} = A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 \quad D_{22} = A_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3 \quad D_{33} = A_{33} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

Ou seja:

$$\underline{\underline{B}}^* = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(c) Encontrar os inversos: $\underline{\underline{A}}^{-1}$ e $\underline{\underline{B}}^{-1}$.

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{\det \underline{\underline{A}}} \underline{\underline{A}}^* = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

E:

$$\underline{\underline{B}}^{-1} = \frac{1}{\det \underline{\underline{B}}} \underline{\underline{B}}^* = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

(d)

$$\det(\underline{\underline{A}}^{-1}) = \frac{1}{\det \underline{\underline{A}}} = 1$$

$$\det(\underline{\underline{B}}^{-1}) = \frac{1}{\det \underline{\underline{B}}} = -\frac{1}{6}$$

(e)

$$\underline{\underline{A}} \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{B}} \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

(f) Por o inverso ser único e o produto de matrizes ser associativo:

$$(\underline{\underline{B}}^{-1} \underline{\underline{A}}^{-1})(\underline{\underline{A}} \underline{\underline{B}}) = \underline{\underline{B}}^{-1}(\underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{A}}) \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{B}}^{-1} \underline{\underline{I}} \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{B}}^{-1} \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{I}}$$

E:

$$(\underline{\underline{A}} \underline{\underline{B}})(\underline{\underline{B}}^{-1} \underline{\underline{A}}^{-1}) = \underline{\underline{A}}(\underline{\underline{B}} \underline{\underline{B}}^{-1}) \underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{A}} \underline{\underline{I}} \underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{A}} \underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{I}}$$

QED

(g)

$$(\underline{\underline{A}} \underline{\underline{B}})^{-1} = \underline{\underline{B}}^{-1} \underline{\underline{A}}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

(h) Encontrar o inverso do produto: $(\underline{\underline{B}} \underline{\underline{A}})^{-1}$.

$$(\underline{\underline{B}} \underline{\underline{A}})^{-1} = \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{B}}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -\frac{2}{3} \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

2. 4 pts. Dado a sistema linear:

$$(*) : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 - x_5 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 - 3x_5 = 3 \end{cases}$$



- (a) Encontrar a solução completa do sistema homogêneo do (*).
(b) Encontrar a solução completa do sistema não homogêneo.
(c) Encontrar a solução completa do sistema:

$$(**) : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 - x_5 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 - 3x_5 = 4 \end{cases}$$

Solution:

Resolvemos tudo de uma vez:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & | & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & -1 & | & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & -3 & | & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & | & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -11 & | & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & -6 & -18 & | & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -17 & | & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 11 & | & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & | & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & | & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & | & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pondo $x_3 = t$ e $x_4 = s$ obtemos a solução completa do sistema homogêneo:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T = (t + 2s, -2t - 3s, t, s, 0)^T, \quad (t, s) \in \mathbb{R}^2$$

E por (*):

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T = (1 + t + 2s, -2t - 3s, t, s, 0)^T, \quad (t, s) \in \mathbb{R}^2$$

E por (**):

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T = (t + 2s, 1 - 2t - 3s, t, s, 0)^T, \quad (t, s) \in \mathbb{R}^2$$

Comentário: Verificar:

- (i) Verifique que a solução da eq. homogênea satisfaz as eqs.
(ii) Verifique que as soluções particulares satisfaz (*) resp. (**).

3. 2 pts. (Cabeludo) Dado as matrizes:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ a & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & b \end{pmatrix}, \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

$$\underline{B} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ a & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 0 & a \\ 0 & 0 & a & 0 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}$$

- (a) Encontrar para quaisquer valores de a e b o determinante do \underline{A} .
(b) Encontrar para quaisquer valores de a e b o posto do \underline{A} .
(c) Encontrar para qualquer valor de a o determinante do \underline{B} .



(d) Para quais valores de a o matriz \underline{B} tem inverso? Para estes valores, encontrar o inverso.

Solution:

(a)

$$\det \underline{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ a & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ a-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{3+1}(-1)^{4+4}(a-1)(b-1) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (a-1)(b-1)(4-9) = -5(a-1)(b-1)$$

(b) Como no item anterior:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ a & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ a-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{pmatrix}$$

Donde segue:

$$\rho_{\underline{A}} = \begin{cases} 4, & a \neq 1 \wedge b \neq 1 \\ 3, & a = 1 \wedge b \neq 1 \\ 3, & a \neq 1 \wedge b = 1 \\ 2, & a = b = 1 \end{cases}$$

(c)

$$\det \underline{B} = \begin{vmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ a & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 0 & a \\ 0 & 0 & a & 0 \end{vmatrix} = a^4 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = a^4 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = a^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = a^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^4$$

(d) O inverso existe se e somente se o determinante não for zero: $a^4 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0$.

Por $a \neq 0$ obtemos:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & a & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & a & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & a & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 & -\frac{1}{a} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{a} & 0 & \frac{1}{a} & 0 \end{array} \right)$$

Assim:

$$\underline{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a} & 0 & -\frac{1}{a} \\ \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} \\ -\frac{1}{a} & 0 & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$$



Data: 05/05/2009
Semestre:
Curso: Engenharia Civil
Disciplina: Álgebra Linear
Prova: I

1. 4 pts. Dado as matrizes:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Sabendo que:

$$\det(\underline{\underline{A}}^{-1}) = \det \underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{\det \underline{\underline{A}}}$$

e:

$$(\underline{\underline{A}} \underline{\underline{B}})^{-1} = \underline{\underline{B}}^{-1} \underline{\underline{A}}^{-1}$$

responde o seguinte:

- (a) Encontrar: $\det \underline{\underline{A}}$ e $\det \underline{\underline{B}}$.
- (b) Encontrar as matrizes adjuntas: $\underline{\underline{A}}^*$ e $\underline{\underline{B}}^*$.
- (c) Encontrar os inversos: $\underline{\underline{A}}^{-1}$ e $\underline{\underline{B}}^{-1}$.
- (d) Encontrar os determinantes dos inversos: $\det(\underline{\underline{A}}^{-1})$ e $\det(\underline{\underline{B}}^{-1})$.
- (e) Encontrar os produtos: $\underline{\underline{A}} \underline{\underline{B}}$ e $\underline{\underline{B}} \underline{\underline{A}}$.
- (f) Encontrar o inverso do produto: $(\underline{\underline{A}} \underline{\underline{B}})^{-1}$.

Solution:

4 pts. Dado as matrizes:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Sabendo que:

$$\det(\underline{\underline{A}}^{-1}) = \det \underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{\det \underline{\underline{A}}}$$

e:

$$(\underline{\underline{A}} \underline{\underline{B}})^{-1} = \underline{\underline{B}}^{-1} \underline{\underline{A}}^{-1}$$

responde o seguinte:

- (a) Encontrar: $\det \underline{\underline{A}}$ e $\det \underline{\underline{B}}$.

$$\det \underline{\underline{A}} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

$$\det \underline{\underline{B}} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 2 \cdot 3 = -6$$



(b) Encontrar as matrizes adjuntas: $\underline{\underline{A}}^*$ e $\underline{\underline{B}}^*$.

Para $\underline{\underline{A}}$:

$$\begin{aligned} D_{11} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3 & D_{12} &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 & D_{13} &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \\ D_{21} &= \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -2 & D_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 & D_{23} &= \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \\ D_{31} &= \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 & D_{32} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 & D_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned} A_{11} &= 3 & A_{12} &= 1 & A_{13} &= -1 \\ A_{21} &= 2 & A_{22} &= 1 & A_{23} &= 0 \\ A_{31} &= -2 & A_{32} &= -1 & A_{33} &= 1 \end{aligned}$$

Ou seja:

$$\underline{\underline{A}}^* = (A_{ji}) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por $\underline{\underline{B}}$ ser diagonal:

$$D_{ij} = A_{ij} = 0, \quad i \neq j$$

$$D_{11} = A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 & D_{22} = A_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3 & D_{33} = A_{33} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

Ou seja:

$$\underline{\underline{B}}^* = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(c) Encontrar os inversos: $\underline{\underline{A}}^{-1}$ e $\underline{\underline{B}}^{-1}$.

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{\det \underline{\underline{A}}} \underline{\underline{A}}^* = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

E:

$$\underline{\underline{B}}^{-1} = \frac{1}{\det \underline{\underline{B}}} \underline{\underline{B}}^* = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

(d) Encontrar os determinantes dos inversos: $\det(\underline{\underline{A}}^{-1})$ e $\det(\underline{\underline{B}}^{-1})$.

$$\det(\underline{\underline{A}}^{-1}) = \frac{1}{\det \underline{\underline{A}}} = 1$$

$$\det(\underline{\underline{B}}^{-1}) = \frac{1}{\det \underline{\underline{B}}} = -\frac{1}{6}$$

(e) Encontrar os produtos: $\underline{\underline{A}} \underline{\underline{B}}$ e $\underline{\underline{B}} \underline{\underline{A}}$.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{B}} &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & -4 & 3 \end{pmatrix} \\ \underline{\underline{B}} \underline{\underline{A}} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



(f) Encontrar o inverso do produto: $(\underline{A} \underline{B})^{-1}$.

$$(\underline{A} \underline{B})^{-1} = \underline{B}^{-1} \underline{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

2. 4 pts. Dado a sistema linear:

$$(*) : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 - x_5 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 - 3x_5 = 3 \end{cases}$$

- (a) Encontrar a solução completa do sistema homogêneo do (*).
(b) Encontrar a solução completa do sistema não homogêneo.
(c) Encontrar a solução completa do sistema:

$$(**) : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 - x_5 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 - 3x_5 = 4 \end{cases}$$

Solution:

4 pts. Dado a sistema linear:

$$(*) : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 - x_5 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 - 3x_5 = 3 \end{cases}$$

- (a) Encontrar a solução completa do sistema homogêneo do (*).
(b) Encontrar a solução completa do sistema não homogêneo.
(c) Encontrar a solução completa do sistema:

$$(**) : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 - x_5 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 - 3x_5 = 4 \end{cases}$$

Resolvemos tudo de uma vez:

$$\left(\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & -3 & 3 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -11 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & -6 & -18 & 0 & -2 \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 0 & -1 & -2 & -17 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 11 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$



Pondo $x_3 = t$ e $x_4 = s$ obtemos a solução completa do sistema homogêneo:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t + 2s \\ -2t - 3s \\ t \\ s \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (t, s) \in \mathbb{R}^2$$

E por (*):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + t + 2s \\ -2t - 3s \\ t \\ s \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (t, s) \in \mathbb{R}^2$$

E por (**):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t + 2s \\ 1 - 2t - 3s \\ t \\ s \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (t, s) \in \mathbb{R}^2$$

Comentário: Controle:

- (i) Verifique que a solução da equação homogênea satisfaz as eqções.
- (ii) Verifique que as soluções particulares satisfaz (*) resp. (**).

3. 2 pts. (Cabeludo) Dado as matrizes:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ a & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & b \end{pmatrix}, \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ a & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 0 & a \\ 0 & 0 & a & 0 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}$$

- (a) Encontrar para quaisquer valores de a e b o determinante do $\underline{\underline{A}}$.
- (b) Encontrar para quaisquer valores de a e b o posto do $\underline{\underline{A}}$.
- (c) Encontrar para qualquer valor de a o determinante do $\underline{\underline{B}}$.
- (d) Para quais valores de a o matriz $\underline{\underline{B}}$ tem inverso? Para estes valores, encontrar o inverso.

Solution:

2 pts. (Cabeludo) Dado as matrizes:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ a & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & b \end{pmatrix}, \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ a & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 0 & a \\ 0 & 0 & a & 0 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}$$



- (a) Encontrar para quaisquer valores de a e b o determinante do \underline{A} .

$$\det \underline{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ a & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ a-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{3+1}(-1)^{4+4}(a-1)(b-1) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (a-1)(b-1)(4-9) = -5(a-1)(b-1)$$

- (b) Encontrar para quaisquer valores de a e b o posto do \underline{A} .

Como no item anterior:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ a & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ a-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{pmatrix}$$

Donde segue:

$$\rho_{\underline{A}} = \begin{cases} 4, & a \neq 1 \wedge b \neq 1 \\ 3, & a = 1 \wedge b \neq 1 \\ 3, & a \neq 1 \wedge b = 1 \\ 2, & a = b = 1 \end{cases}$$

- (c) Encontrar para qualquer valor de a o determinante do \underline{B} .

$$\det \underline{B} = \begin{vmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ a & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 0 & a \\ 0 & 0 & a & 0 \end{vmatrix} = a^4 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = a^4 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = a^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = a^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^4$$

- (d) Para quais valores de a o matriz \underline{B} tem inverso? Para estes valores, encontrar o inverso.

O inverso existe se e somente se o determinante não for zero: $a^4 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0$.

Por $a \neq 0$ obtemos:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & a & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & a & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & a & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 & -\frac{1}{a} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{a} & 0 & \frac{1}{a} & 0 \end{array} \right)$$

Assim:

$$\underline{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a} & 0 & -\frac{1}{a} \\ \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} \\ -\frac{1}{a} & 0 & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$$



Data: 27/05/2009
Semestre:
Curso: Engenharia de Computação
Disciplina: Álgebra Linear
Prova: II

1. 2 pts. Dado os vetores em relação ao base canônica, $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4, \underline{e}_5)$, em \mathbb{R}^5 :

$$\underline{v}_1 = (1, 1, 1, 1, 1)^T \quad \underline{v}_2 = (1, -1, 1, -1, 1)^T \quad \underline{v}_3 = (3, -1, 3, -1, 3)^T \quad \underline{v}_4 = (0, 1, 0, 1, 0)^T$$

- (a) Mostre que: $V = \text{ger}(\underline{v}_1, \underline{v}_2) = \text{ger}(\underline{v}_3, \underline{v}_4)$. Qual a dimensão do V ?
(b) Escreva \underline{v}_1 e \underline{v}_2 como combinações lineares de \underline{v}_3 e \underline{v}_4 .
(c) Escreva \underline{v}_3 e \underline{v}_4 como combinações lineares de \underline{v}_1 e \underline{v}_2 .

Solution:

2 pts. Dado os vetores em relação ao base canônica, $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4, \underline{e}_5)$, em \mathbb{R}^5 :

$$\underline{v}_1 = (1, 1, 1, 1, 1)^T \quad \underline{v}_2 = (1, -1, 1, -1, 1)^T \quad \underline{v}_3 = (3, -1, 3, -1, 3)^T \quad \underline{v}_4 = (0, 1, 0, 1, 0)^T$$

- (a) Mostre que: $V = \text{ger}(\underline{v}_1, \underline{v}_2) = \text{ger}(\underline{v}_3, \underline{v}_4)$. Qual a dimensão do V ?
(b) Escreva \underline{v}_1 e \underline{v}_2 como combinações lineares de \underline{v}_3 e \underline{v}_4 .
(c) Escreva \underline{v}_3 e \underline{v}_4 como combinações lineares de \underline{v}_1 e \underline{v}_2 .

Solução:

- (a) Formamos o matriz com os vetores em colunas:

$$\underline{V} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dai segue: $\dim \text{ger}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4) = \dim \text{ger}(\underline{v}_1, \underline{v}_2) = \dim \text{ger}(\underline{v}_3, \underline{v}_4) = 2$, o que implica: $\text{ger}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4) = \text{ger}(\underline{v}_1, \underline{v}_2) = \text{ger}(\underline{v}_3, \underline{v}_4) = 2$. A dimensão é o posto do matriz \underline{V} , isto é 2.

- (b) Omitindo as linhas com somente zeros:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & -\frac{1}{2} \end{array} \right)$$

Segue: $\underline{v}_3 = \underline{v}_1 + 2\underline{v}_2$, e: $\underline{v}_4 = \frac{1}{2}\underline{v}_1 - \frac{1}{2}\underline{v}_2$.

- (c) Trocando o ordem dos vetores:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 0 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -4 & 1 & 0 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{10}{3} \end{array} \right)$$

Segue: $\underline{v}_1 = \frac{1}{3}\underline{v}_3 + \frac{4}{3}\underline{v}_4$, e: $\underline{v}_2 = \frac{1}{3}\underline{v}_3 - \frac{2}{3}\underline{v}_4$.

2. 6 pts. Dado os vetores em relação ao base canônica, $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4)$, em \mathbb{R}^4 :

$$\underline{v}_1 = (1, 1, 1, 1)^T \quad \underline{v}_2 = (1, -1, 1, -1)^T \quad \underline{v}_3 = (1, 1, -1, -1)^T \quad \underline{v}_4 = (1, -1, -1, 1)^T$$

- (a) Mostre que os \underline{v}_i 's são mutuamente ortogonais, isto é: $\underline{v}_i \cdot \underline{v}_j = 0$ por $i \neq j$.
(b) Encontrar um base ortonormal de \mathbb{R}^4 , $(\underline{d}_1, \underline{d}_2, \underline{d}_3, \underline{d}_4)$, tal que: $\underline{d}_i = c_i \underline{v}_i$.



- (c) Encontrar uma relação matricial entre os coordenados em relação aos \underline{e}_i 's (antigos), \underline{x}_A , e os coordenados em relação aos \underline{d}_i 's (novos), \underline{x}_N :

$$\underline{x}_A = \underline{D} \underline{x}_N$$

- (d) Encontrar uma relação matricial entre os coordenados novos, \underline{x}_N , e os coordenados antigos, \underline{x}_A :

$$\underline{x}_N = \underline{D}' \underline{x}_A$$

- (e) Justificar que vale: $\underline{D}' = \underline{D}^{-1} = \underline{D}^T = \underline{D}$.

- (f) Encontrar os coordenados dos vetores:

$$\underline{w}_1 = (-1, 1, -1, 1)^T \quad \underline{w}_2 = (1, 2, 3, 4)^T$$

em relação ao base novo, $(\underline{d}_1, \underline{d}_2, \underline{d}_3, \underline{d}_4)$.

Solution:

6 pts. Dado os vetores em relação ao base canônica, $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4)$, em \mathbb{R}^4 :

$$\underline{v}_1 = (1, 1, 1, 1)^T \quad \underline{v}_2 = (1, -1, 1, -1)^T \quad \underline{v}_3 = (1, 1, -1, -1)^T \quad \underline{v}_4 = (1, -1, -1, 1)^T$$

- (a) Mostre que os \underline{v}_i 's são mutuamente ortogonais, isto é: $\underline{v}_i \cdot \underline{v}_j = 0$ por $i \neq j$.
- (b) Encontrar um base *ortonormal* de \mathbb{R}^4 , $(\underline{d}_1, \underline{d}_2, \underline{d}_3, \underline{d}_4)$, tal que: $\underline{d}_i = c_i \underline{v}_i$.
- (c) Encontrar uma relação matricial entre os coordenados em relação aos \underline{e}_i 's (antigos), \underline{x}_A , e os coordenados em relação aos \underline{d}_i 's (novos), \underline{x}_N :

$$\underline{x}_A = \underline{D} \underline{x}_N$$

- (d) Encontrar uma relação matricial entre os coordenados novos, \underline{x}_N , e os coordenados antigos, \underline{x}_A :

$$\underline{x}_N = \underline{D}' \underline{x}_A$$

- (e) Justificar que vale: $\underline{D}' = \underline{D}^{-1} = \underline{D}^T = \underline{D}$.

- (f) Encontrar os coordenados dos vetores:

$$\underline{w}_1 = (-1, 1, -1, 1)^T \quad \underline{w}_2 = (1, 2, 3, 4)^T$$

em relação ao base novo, $(\underline{d}_1, \underline{d}_2, \underline{d}_3, \underline{d}_4)$.

Solução:

- (a) Verificamos:

$$\begin{aligned} \underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2 &= 1 - 1 + 1 - 1 = 0 & \underline{v}_1 \cdot \underline{v}_3 &= 1 + 1 - 1 - 1 = 0 & \underline{v}_1 \cdot \underline{v}_4 &= 1 - 1 - 1 + 1 = 0 \\ \underline{v}_2 \cdot \underline{v}_3 &= 1 - 1 - 1 + 1 = 0 & \underline{v}_2 \cdot \underline{v}_4 &= 1 + 1 - 1 - 1 = 0 \\ \underline{v}_3 \cdot \underline{v}_4 &= 1 - 1 + 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

QED¹.

- (b) Normalizamos os \underline{v}_i 's: $|\underline{v}_1| = |\underline{v}_2| = |\underline{v}_3| = |\underline{v}_4| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$. Assim:

$$\begin{aligned} \underline{d}_1 &= \frac{\underline{v}_1}{|\underline{v}_1|} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T \\ \underline{d}_2 &= \frac{\underline{v}_2}{|\underline{v}_2|} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)^T \end{aligned}$$

¹Quod Erat Demonstrandum



$$\underline{\mathbf{d}}_3 = \frac{\underline{\mathbf{v}}_3}{|\underline{\mathbf{v}}_3|} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right)^T$$

$$\underline{\mathbf{d}}_4 = \frac{\underline{\mathbf{v}}_4}{|\underline{\mathbf{v}}_4|} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)^T$$

É claro que $\underline{\mathbf{d}}_i$'s são ortonormais, pois: $\underline{\mathbf{d}}_i \cdot \underline{\mathbf{d}}_j = 0$ por $i \neq j$, e: $\underline{\mathbf{d}}_i \cdot \underline{\mathbf{d}}_i = 1$.

(c) Organizamos os $\underline{\mathbf{d}}_i$'s como colunas em uma matriz:

$$\underline{\mathbf{D}} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \underline{\mathbf{d}}_1 & \underline{\mathbf{d}}_2 & \underline{\mathbf{d}}_3 & \underline{\mathbf{d}}_4 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Temos:

$$\underline{\mathbf{x}}_A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underline{\mathbf{x}}_N$$

(d) Por $\underline{\mathbf{D}}$ ser *ortogonal*, temos: $\underline{\mathbf{D}}^{-1} = \underline{\mathbf{D}}^T$. Observamos que $\underline{\mathbf{D}}$ ainda é simétrica: $\underline{\mathbf{D}} = \underline{\mathbf{D}}^T$, ou seja: $\underline{\mathbf{D}}^{-1} = \underline{\mathbf{D}}$. Assim, invertemos a equação acima:

$$\underline{\mathbf{x}}_N = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underline{\mathbf{x}}_A$$

(e) Já justificamos isto no item anterior; por $\underline{\mathbf{D}}$ ser ortogonal e simétrica, vale: $\underline{\mathbf{D}}' = \underline{\mathbf{D}}^{-1} = \underline{\mathbf{D}}^T = \underline{\mathbf{D}}$.

(f) Encontramos $\underline{\mathbf{w}}_1$ em coordenados novos:

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1+1-1+1 \\ -1-1-1-1 \\ -1+1+1-1 \\ -1-1+1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ilustrando que: $\underline{\mathbf{w}}_1 = -2\underline{\mathbf{d}}_2$.

Para $\underline{\mathbf{w}}_2$:

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+2+3+4 \\ 1-2+3-4 \\ 1+2-3-4 \\ 1-2-3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Podemos verificar: $\underline{\mathbf{w}}_2 = 5\underline{\mathbf{d}}_1 - \underline{\mathbf{d}}_2 - 2\underline{\mathbf{d}}_3$.

3. 2 pts. (Cabeludo?) *Ortogonalização de Graham-Schmidt*

Dado os vetores em \mathbb{R}^3 :

$$\underline{\mathbf{v}}_1 = (1, 1, 1)^T \quad \underline{\mathbf{v}}_2 = (1, -1, 1)^T \quad \underline{\mathbf{v}}_3 = (1, 1, -1)^T$$

(a) Mostre que $\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2, \underline{\mathbf{v}}_3$ *não* são mutuamente ortogonais.

(b) Mostre que $\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2, \underline{\mathbf{v}}_3$ são linearmente independentes.

(c) Escolhendo: $\underline{\mathbf{d}}_1 = \underline{\mathbf{v}}_1$ e $\underline{\mathbf{d}}_2 = \underline{\mathbf{v}}_2 + \alpha \underline{\mathbf{d}}_1$, mostre que por:

$$\alpha = -\frac{\underline{\mathbf{d}}_1 \cdot \underline{\mathbf{v}}_2}{\underline{\mathbf{d}}_1 \cdot \underline{\mathbf{d}}_1}$$

obtemos um vetor, $\underline{\mathbf{d}}_2 \perp \underline{\mathbf{d}}_1$. Encontrar $\underline{\mathbf{d}}_2$.



(d) Escolhendo: $\underline{d}_3 = \underline{v}_3 + \beta \underline{d}_1 + \gamma \underline{d}_2$, mostre que por:

$$\beta = -\frac{\underline{d}_1 \cdot \underline{v}_3}{\underline{d}_1 \cdot \underline{d}_1} \quad \gamma = -\frac{\underline{d}_2 \cdot \underline{v}_3}{\underline{d}_2 \cdot \underline{d}_2}$$

obtemos um vetor, $\underline{d}_3 \perp \underline{d}_1$ e $\underline{d}_3 \perp \underline{d}_2$. Encontrar \underline{d}_3 .

Solution:

2 pts. (Cabeludo?) *Ortogonalização de Graham-Schmidt*

Dado os vetores em \mathbb{R}^3 :

$$\underline{v}_1 = (1, 1, 1)^T \quad \underline{v}_2 = (1, -1, 1)^T \quad \underline{v}_3 = (1, 1, -1)^T$$

(a) Mostre que $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ não são mutuamente ortogonais.

(b) Mostre que $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ são linearmente independentes.

(c) Escolhendo: $\underline{d}_1 = \underline{v}_1$ e $\underline{d}_2 = \underline{v}_2 + \alpha \underline{d}_1$, mostre que por:

$$\alpha = -\frac{\underline{d}_1 \cdot \underline{v}_2}{\underline{d}_1 \cdot \underline{d}_1}$$

obtemos um vetor, $\underline{d}_2 \perp \underline{d}_1$. Encontrar \underline{d}_2 .

(d) Escolhendo: $\underline{d}_3 = \underline{v}_3 + \beta \underline{d}_1 + \gamma \underline{d}_2$, mostre que por:

$$\beta = -\frac{\underline{d}_1 \cdot \underline{v}_3}{\underline{d}_1 \cdot \underline{d}_1} \quad \gamma = -\frac{\underline{d}_2 \cdot \underline{v}_3}{\underline{d}_2 \cdot \underline{d}_2}$$

obtemos um vetor, $\underline{d}_3 \perp \underline{d}_1$ e $\underline{d}_3 \perp \underline{d}_2$. Encontrar \underline{d}_3 .

Solução:

(a) Os \underline{v}_i 's não são mutuamente ortogonais, pois:

$$\underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2 = 1 - 1 + 1 = 1 \neq 0 \quad \underline{v}_1 \cdot \underline{v}_3 = 1 + 1 - 1 = 1 \neq 0$$

$$\underline{v}_2 \cdot \underline{v}_3 = 1 - 1 - 1 = -1 \neq 0$$

(b)

$$\underline{\underline{V}} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \underline{v}_1 & \underline{v}_2 & \underline{v}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Segue, que $\rho_{\underline{\underline{V}}} = 3$, ou seja: os \underline{v}_i 's são linearmente independentes.

(c) Na equação $\underline{d}_2 = \underline{v}_2 + \alpha \underline{d}_1$, fazemos o produto escalar com \underline{d}_1 :

$$\underline{d}_1 \cdot \underline{d}_2 = \underline{d}_1 \cdot \underline{v}_2 + \alpha(\underline{d}_1 \cdot \underline{d}_1)$$

Exigindo $\underline{d}_1 \perp \underline{d}_2$ - ou seja: $\underline{d}_1 \cdot \underline{d}_2 = 0$ - segue:

$$\alpha = -\frac{\underline{d}_1 \cdot \underline{v}_2}{\underline{d}_1 \cdot \underline{d}_1}$$

Usando resultados anteriores:

$$\underline{d}_1 \cdot \underline{v}_2 = 1$$

$$\underline{d}_1 \cdot \underline{d}_1 = 3$$

Assim: $\alpha = -\frac{1}{3}$, e assim:



$$\underline{d}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Observamos:

$$\underline{d}_1 \cdot \underline{d}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{2}{3} - \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 0$$

Isto é: $\underline{d}_2 \perp \underline{d}_1$.

(d) Na $\underline{d}_3 = \underline{v}_3 + \beta \underline{d}_1 + \gamma \underline{d}_2$ fazemos o produto escalar com \underline{d}_1 e utilizamos que $\underline{d}_1 \cdot \underline{d}_2 = 0$:

$$\underline{d}_1 \cdot \underline{d}_3 = \underline{d}_1 \cdot \underline{v}_3 + \beta(\underline{d}_1 \cdot \underline{d}_1) + 0$$

Exigindo $\underline{d}_1 \cdot \underline{d}_3 = 0$, obtemos:

$$\beta = -\frac{\underline{d}_1 \cdot \underline{v}_3}{\underline{d}_1 \cdot \underline{d}_1}$$

Fazendo o produto escalar com \underline{d}_2 , segue de mesma maneira:

$$\gamma = -\frac{\underline{d}_2 \cdot \underline{v}_3}{\underline{d}_2 \cdot \underline{d}_2}$$

Usando resultados anteriores:

$$\underline{d}_1 \cdot \underline{v}_3 = 1$$

$$\underline{d}_1 \cdot \underline{d}_1 = 3$$

Assim:

$$\beta = -\frac{1}{3}$$

E mais:

$$\underline{d}_2 \cdot \underline{v}_3 = -\frac{4}{3}$$

$$\underline{d}_2 \cdot \underline{d}_2 = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}$$

Assim:

$$\gamma = \frac{1}{2}$$

Finalmente calculamos \underline{d}_3 :

$$\underline{d}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Observamos:

$$\underline{d}_1 \cdot \underline{d}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 + 0 - 1 = 0$$

$$\underline{d}_2 \cdot \underline{d}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{2}{3} + 0 - \frac{2}{3} = 0$$

Isto é: $\underline{d}_3 \perp \underline{d}_1$ e $\underline{d}_3 \perp \underline{d}_2$.



Data: 17/06/2009
Semestre:
Curso: Engenharia Civil
Disciplina: Álgebra Linear
Prova: II

1. 2 pts. Dado os vetores em relação ao base canônica, $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4, \underline{e}_5)$, em \mathbb{R}^5 :

$$\underline{v}_1 = (1, 2, 2, 2, 1)^T \quad \underline{v}_2 = (1, 0, 0, 0, 1)^T \quad \underline{v}_3 = (2, 2, 2, 2, 2)^T \quad \underline{v}_4 = (0, 1, 1, 1, 0)^T$$

- (a) Mostre que: $V = \text{ger}(\underline{v}_1, \underline{v}_2) = \text{ger}(\underline{v}_3, \underline{v}_4)$. Qual a dimensão do V ?
(b) Escreve \underline{v}_1 e \underline{v}_2 como combinações lineares de \underline{v}_3 e \underline{v}_4 .
(c) Escreve \underline{v}_3 e \underline{v}_4 como combinações lineares de \underline{v}_1 e \underline{v}_2 .

Solution:

- (a) Formamos o matriz com os vetores em colunas:

$$\underline{V} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dai segue: $\dim \text{ger}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4) = \dim \text{ger}(\underline{v}_1, \underline{v}_2) = \dim \text{ger}(\underline{v}_3, \underline{v}_4) = 2$, o que implica: $\text{ger}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4) = \text{ger}(\underline{v}_1, \underline{v}_2) = \text{ger}(\underline{v}_3, \underline{v}_4) = 2$. A dimensão é o posto do matriz \underline{V} , isto é 2.

- (b) Omitindo as linhas com somente com zeros e trocando a ordem dos vetores:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

Segue: $\underline{v}_1 = \frac{1}{2}\underline{v}_3 + \underline{v}_4$, e: $\underline{v}_2 = \frac{1}{2}\underline{v}_3 - \underline{v}_4$.

- (c) Similarmente:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array} \right)$$

Segue: $\underline{v}_3 = \underline{v}_1 + \underline{v}_2$, e: $\underline{v}_4 = \frac{1}{2}\underline{v}_1 - \frac{1}{2}\underline{v}_2$.

2. 3 pts. Qual a dimensão dos conjuntos gerados de:

- (a) $f_1(x) = x(1-x)$, $f_2(x) = x(1+x)$, $f_3(x) = x(1-x^2)$ e $f_4(x) = x(3-x^2)$.
(b) $\underline{v}_1 = (1, -1, -1, -1)^T$, $\underline{v}_2 = (1, 1, -1, -1)^T$, $\underline{v}_3 = (1, 1, 1, -1)^T$, $\underline{v}_4 = (1, 1, 1, 1)^T$, $\underline{v}_5 = (0, 0, 1, 1)^T$.
(c) $\underline{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\underline{A}_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, $\underline{A}_3 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\underline{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Solution:

- (a) Desenvolvendo:

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + c_3 f_3(x) + c_4 f_4(x) = c_1 x(1-x) + c_2 x(1+x) + c_3 x(1-x^2) + c_4 x(3-x^2) = x(c_1 + c_2 + c_3 + 3c_4) + x^2(-c_1 + c_2) + x^3(c_3 - c_4) \equiv 0$$

O que vale se e somente se: $c_1 + c_2 + c_3 + 3c_4 = -c_1 + c_2 - c_3 - 3c_4 = c_3 - c_4 = 0$. Na forma matricial:

$$\underline{F} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

O que mostre que $\rho_{\underline{F}} = \dim \text{ger}(f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)) = 3$.



(b) Siempre el mismo estribillo:

$$\underline{\underline{\mathbf{V}}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

O que mostre que $\rho_{\underline{\underline{\mathbf{V}}}} = \dim \text{ger}(\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2, \underline{\mathbf{v}}_3, \underline{\mathbf{v}}_4, \underline{\mathbf{v}}_5) = 4$.

(c) Transformamos a equação matricial:

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\mathbf{0}}}$$

em uma equação vetorial:

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\mathbf{0}}}$$

Com matriz:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & 7 & -12 & -2 \\ 0 & 7 & -9 & -1 \\ 0 & 0 & -8 & -2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & 7 & -12 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & 7 & -12 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & 7 & -12 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

O que mostre que $\rho_{\underline{\underline{\mathbf{A}}}} = \dim \text{ger}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}_1, \underline{\underline{\mathbf{A}}}_2, \underline{\underline{\mathbf{A}}}_3, \underline{\underline{\mathbf{A}}}_4) = 4$.

3. 3 pts. Dado os vetores em \mathbb{R}^3 :

$$\underline{\mathbf{v}}_1 = (1, 1, 1)^T \quad \underline{\mathbf{v}}_2 = (1, 1, 0)^T \quad \underline{\mathbf{v}}_3 = (1, 0, 1)^T$$

- Mostre que $(\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2, \underline{\mathbf{v}}_3)$ formam uma base em \mathbb{R}^3 .
- Encontrar uma relação matricial expressando os coordenados em relação ao base $(\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2, \underline{\mathbf{v}}_3)$, em termos dos coordenados em relação ao base canônica, $(\underline{\mathbf{i}}, \underline{\mathbf{j}}, \underline{\mathbf{k}})$.
- Encontrar os coordenados em relação ao base $(\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2, \underline{\mathbf{v}}_3)$ dos vetores: $\underline{\mathbf{w}}_1 = (1, 2, 3)^T$ e $\underline{\mathbf{w}}_2 = (3, 2, 1)^T$

Solution:

3 pts. Dado os vetores em \mathbb{R}^3 :

$$\underline{\mathbf{v}}_1 = (1, 1, 1)^T \quad \underline{\mathbf{v}}_2 = (1, 1, 0)^T \quad \underline{\mathbf{v}}_3 = (1, 0, 1)^T$$

- Mostre que $(\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2, \underline{\mathbf{v}}_3)$ formam uma base em \mathbb{R}^3 .
- Encontrar uma relação matricial expressando os coordenados em relação ao base $(\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2, \underline{\mathbf{v}}_3)$, em termos dos coordenados em relação ao base canônica, $(\underline{\mathbf{i}}, \underline{\mathbf{j}}, \underline{\mathbf{k}})$.
- Encontrar os coordenados em relação ao base $(\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2, \underline{\mathbf{v}}_3)$ dos vetores: $\underline{\mathbf{w}}_1 = (1, 2, 3)^T$ e $\underline{\mathbf{w}}_2 = (3, 2, 1)^T$

Solução:



(a) Formamos o matriz: $\underline{\underline{\mathbf{V}}} = (\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2, \underline{\mathbf{v}}_3)$:

$$\begin{aligned} (\underline{\underline{\mathbf{V}}} | \underline{\underline{\mathbf{I}}}) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \\ &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) = (\underline{\underline{\mathbf{I}}} | \underline{\underline{\mathbf{V}}}^{-1}) \end{aligned}$$

Mostrando que $\underline{\underline{\mathbf{V}}}$ é regular e assim $\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2, \underline{\mathbf{v}}_3$ formam um base em \mathbb{R}^3 .

(b) No cálculo na questão anterior calculamos o inverso, $\underline{\underline{\mathbf{V}}}^{-1}: \underline{\mathbf{x}}_A = \underline{\underline{\mathbf{V}}}\underline{\mathbf{x}}_N$, ou equivalentemente: $\underline{\mathbf{x}}_N = \underline{\underline{\mathbf{V}}}^{-1}\underline{\mathbf{x}}_A$:

$$\underline{\mathbf{x}}_N = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underline{\mathbf{x}}_A$$

(c) Usando esta equação encontramos os coordenados novos dos vetores $\underline{\mathbf{w}}_1$:

$$\underline{\mathbf{w}}'_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

E do $\underline{\mathbf{w}}_2$:

$$\underline{\mathbf{w}}'_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. 2 pts. Considere os vetores do exercício anterior:

$$\underline{\mathbf{v}}_1 = (1, 1, 1)^T \quad \underline{\mathbf{v}}_2 = (1, 1, 0)^T \quad \underline{\mathbf{v}}_3 = (1, 0, 1)^T$$

- Definindo: $\underline{\mathbf{d}}_1 = \underline{\mathbf{v}}_1$ e $\underline{\mathbf{d}}_2 = \underline{\mathbf{d}}_1 \times \underline{\mathbf{v}}_2$. Encontrar $\underline{\mathbf{d}}_1$ e $\underline{\mathbf{d}}_2$. Mostrar que $\underline{\mathbf{d}}_1$ e $\underline{\mathbf{d}}_2$ são ortogonais.
- Definindo: $\underline{\mathbf{d}}_3 = \underline{\mathbf{d}}_1 \times \underline{\mathbf{d}}_2$. Encontrar $\underline{\mathbf{d}}_3$. Mostrar que $\underline{\mathbf{d}}_3$ é ortogonal em $\underline{\mathbf{d}}_1$ e $\underline{\mathbf{d}}_2$.
- Encontrar uma base ortonormal de \mathbb{R}^3 , cuja os eixos são paralelos com os vetores $\underline{\mathbf{d}}_1, \underline{\mathbf{d}}_2$ e $\underline{\mathbf{d}}_3$. Encontrar o matriz deste substituição ortonormal, $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$. Demonstrar que $\underline{\underline{\mathbf{M}}}^{-1} = \underline{\underline{\mathbf{M}}}^T$ e encontrar seu determinante.
- Encontrar neste base os coordenados dos vetores: $\underline{\mathbf{w}}_1 = (0, 1, 1)^T$ e $\underline{\mathbf{w}}_2 = (0, 0, 1)^T$.

Solution:

2 pts. Considere os vetores do exercício anterior:

$$\underline{\mathbf{v}}_1 = (1, 1, 1)^T \quad \underline{\mathbf{v}}_2 = (1, 1, 0)^T \quad \underline{\mathbf{v}}_3 = (1, 0, 1)^T$$

- Definindo: $\underline{\mathbf{d}}_1 = \underline{\mathbf{v}}_1$ e $\underline{\mathbf{d}}_2 = \underline{\mathbf{d}}_1 \times \underline{\mathbf{v}}_2$. Encontrar $\underline{\mathbf{d}}_1$ e $\underline{\mathbf{d}}_2$. Mostrar que $\underline{\mathbf{d}}_1$ e $\underline{\mathbf{d}}_2$ são ortogonais.
- Definindo: $\underline{\mathbf{d}}_3 = \underline{\mathbf{d}}_1 \times \underline{\mathbf{d}}_2$. Encontrar $\underline{\mathbf{d}}_3$. Mostrar que $\underline{\mathbf{d}}_3$ é ortogonal em $\underline{\mathbf{d}}_1$ e $\underline{\mathbf{d}}_2$.
- Encontrar uma base ortonormal de \mathbb{R}^3 , cuja os eixos são paralelos com os vetores $\underline{\mathbf{d}}_1, \underline{\mathbf{d}}_2$ e $\underline{\mathbf{d}}_3$. Encontrar o matriz deste substituição ortonormal, $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$. Demonstrar que $\underline{\underline{\mathbf{M}}}^{-1} = \underline{\underline{\mathbf{M}}}^T$ e encontrar seu determinante.
- Encontrar neste base os coordenados dos vetores: $\underline{\mathbf{w}}_1 = (0, 1, 1)^T$ e $\underline{\mathbf{w}}_2 = (0, 0, 1)^T$.

Solução:

(a) $\underline{\mathbf{d}}_1 = \underline{\mathbf{v}}_1 = (1, 1, 1)^T$, e:

$$\underline{\mathbf{d}}_2 = \underline{\mathbf{d}}_1 \times \underline{\mathbf{v}}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, 1, 0)^T$$

Por ser o produto vetorial (que produz um vetor ortogonal das operantes), $\underline{\mathbf{d}}_1 \perp \underline{\mathbf{d}}_2$.



(b) Calculando:

$$\underline{\mathbf{d}}_3 = \underline{\mathbf{d}}_1 \times \underline{\mathbf{d}}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, -1, 2)^T$$

De novo, pelas propriedades do produto vetorial, $\underline{\mathbf{d}}_3$ é ortogonal em $\underline{\mathbf{d}}_1$ e $\underline{\mathbf{d}}_2$.

(c) Como os vetores $\underline{\mathbf{d}}_1, \underline{\mathbf{d}}_2, \underline{\mathbf{d}}_3$ são mutuamente ortogonais, basta nos normalizar as três para obter um base ortonormal:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{m}}_1 &= \frac{\underline{\mathbf{d}}_1}{|\underline{\mathbf{d}}_1|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T \\ \underline{\mathbf{m}}_2 &= \frac{\underline{\mathbf{d}}_2}{|\underline{\mathbf{d}}_2|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0)^T \\ \underline{\mathbf{m}}_3 &= \frac{\underline{\mathbf{d}}_3}{|\underline{\mathbf{d}}_3|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, -1, 2)^T \end{aligned}$$

Organizando como colunas em uma matriz ortogonal:

$$\underline{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Por ser ortogonal, temos $\underline{\mathbf{M}}^{-1} = \underline{\mathbf{M}}^T$ (alternativamente, basta so mostrar que $\underline{\mathbf{M}}^T \underline{\mathbf{M}} = \underline{\mathbf{I}}$). E para seu determinante:

$$\begin{aligned} \det \underline{\mathbf{M}} &= \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} (6 - 0) = 1 \end{aligned}$$

(d) O matriz transformando coordenados antigos em coordenados novos, é $\underline{\mathbf{M}}^{-1}$, assim:

$$\underline{\mathbf{w}}'_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

E:

$$\underline{\mathbf{w}}'_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$



Data: 03/07/2009
Semestre:
Curso: Engenharia Civil
Disciplina: Álgebra Linear
Prova: III - Chamada Extra

1. (465) 4 pts. Dado o matriz, $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, de uma aplicação linear, $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

- (a) Mostre que o núcleo (kernel), $\ker f = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \underline{\underline{\mathbf{A}}} \mathbf{x} = \mathbf{0}\}$, tem dimensão 0.
(b) Encontrar autovalores e autovetores de f .
(c) Mostre que é possível escolher um base de autovetores de f .
(d) Encontre o matriz, $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$, de f ao respeito desde base. Qual a relação entre $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ e $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$?

Solution:

(a)

$$\det \underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 = 24 \neq 0$$

Ou seja, $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ é regular, isto é: $\dim \ker f = 0$.

(b)

$$P(\lambda) = \det(\underline{\underline{\mathbf{A}}} - \lambda \underline{\underline{\mathbf{I}}}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 3-\lambda & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 2-\lambda & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 0 \\ -2 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(4-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \vee \lambda = 2 \vee \lambda = 3 \vee \lambda = 4$$

Notamos que a soma dos autovalores é igual o traço do $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$.

i. $\lambda_1 = 1$:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} - \underline{\underline{\mathbf{I}}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow$$

$$x_1 = x_3 = -x_2 \wedge x_4 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = t(1, -1, 1, 0)^T, t \in \mathbb{R}$$

ii. $\lambda_2 = 2$:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} - 2\underline{\underline{\mathbf{I}}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow$$

$$x_1 = x_2 = x_4 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = t(0, 0, 1, 0)^T, t \in \mathbb{R}$$



iii. $\lambda_3 = 3$:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} - 3\underline{\underline{\mathbf{I}}} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{\underline{\mathbf{x}}} = \underline{\underline{\mathbf{0}}} \Leftrightarrow$$

$$x_2 = -x_3 \wedge x_1 = x_4 = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{\mathbf{x}}} = t(0, 1, -1, 0)^T, t \in \mathbb{R}$$

iv. $\lambda_4 = 4$:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} - 4\underline{\underline{\mathbf{I}}} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{\underline{\mathbf{x}}} = \underline{\underline{\mathbf{0}}} \Leftrightarrow$$

$$x_2 = x_4 \wedge x_1 = -x_4 \wedge x_3 = -x_4 \Leftrightarrow \underline{\underline{\mathbf{x}}} = t(-1, 1, -1, 1)^T, t \in \mathbb{R}$$

(c) Por ter 4 autovalores diferentes, é possível escolher uma base de autovetores, por ex:

$$\underline{\underline{\mathbf{v}}}_1 = (1, -1, 1, 0) \quad \underline{\underline{\mathbf{v}}}_2 = (0, 0, 1, 0) \quad \underline{\underline{\mathbf{v}}}_3 = (0, 1, -1, 0) \quad \underline{\underline{\mathbf{v}}}_4 = (-1, 1, -1, 1)$$

(d) Ao respeito da base $\underline{\underline{\mathbf{v}}}_i$ a matriz é:

$$\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Colocando os $\underline{\underline{\mathbf{v}}}_i$'s nos colunas do matriz $\underline{\underline{\mathbf{V}}}$:

$$\underline{\underline{\mathbf{V}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A relação entre $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ e $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ é: $\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{V}}}^{-1} \underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\underline{\mathbf{V}}}$.

Ressaltamos que $\underline{\underline{\mathbf{V}}}^{-1} \neq \underline{\underline{\mathbf{V}}}$, pois $\underline{\underline{\mathbf{V}}}$ não é ortogonal (ie. os $\underline{\underline{\mathbf{v}}}_i$'s não são ortonormais - nem ortogonais).

2. (341, c) 4 pts. Dado a forma quadrática:

$$(*) \quad x^2 + y^2 - z^2 + 2xy$$

(a) Encontrar uma substituição ortogonal, $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$, que reduz (*) em uma forma sem termos mistos: $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \lambda_3 z_1^2$ - onde $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$.

(b) Classificar geométricamente: $x^2 + y^2 - z^2 + 2xy - 2x - 4y - 1 = 0$.

Solution:

(a) Primeiramente, com $\underline{\underline{\mathbf{r}}} = (x, y, z)^T$:

$$x^2 + y^2 - z^2 + 2xy = \underline{\underline{\mathbf{r}}}^T \underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\underline{\mathbf{r}}} = (x \ y \ z) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Procuramos os autovalores do $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$:

$$\det(\underline{\underline{\mathbf{A}}} - \lambda \underline{\underline{\mathbf{I}}}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda) [(1-\lambda)^2 - 1] = 0 \Leftrightarrow$$



$$\lambda = -1 \vee (1 - \lambda)^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = -1 \vee 1 - \lambda = \pm 1 \Leftrightarrow \lambda_1 = 2 \vee \lambda_2 = 0 \vee \lambda_3 = -1$$

Notamos: $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 = \text{Tr } \underline{\underline{A}}$. E: $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 0 = \det \underline{\underline{A}}$.

Encontramos autovetores:

i. $\lambda_1 = 2$:

$$\underline{\underline{A}} - 2\underline{\underline{I}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{\underline{x}} = \underline{\underline{0}} \Leftrightarrow$$

$$x_1 = x_2 \wedge x_3 = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x}} = t(1, 1, 0)^T, t \in \mathbb{R}$$

Normalizando: $\underline{\underline{v}}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)^T$.

ii. $\lambda_2 = 0$:

$$\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{I}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{\underline{x}} = \underline{\underline{0}} \Leftrightarrow$$

$$x_1 = -x_2 \wedge x_3 = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x}} = t(-1, 1, 0)^T, t \in \mathbb{R}$$

Normalizando: $\underline{\underline{v}}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0)^T$.

iii. $\lambda_3 = -1$: Por ser ortogonal dos outros dois autovetores, temos:

$$(1, 1, 0)^T \times (-1, 1, 0)^T = (0, 0, 2)^T$$

Normalizando: $\underline{\underline{v}}_3 = (0, 0, 1)^T$.

Assim, a substituição ortogonal diagonalizando (*) é:

$$\underline{\underline{V}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{V}}^{-1} = \underline{\underline{V}}^T$$

A matriz neste base é:

$$\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{V}}^T \underline{\underline{A}} \underline{\underline{V}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Transformando (*) em:

$$x^2 + y^2 - z^2 + 2xy = 2x'^2 - z'^2$$

A relação entre os coordenados antigos e novos é:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\underline{V}} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \\ z' \end{pmatrix}$$

(b) Usando o resultado do item anterior:

$$-2x - 4y = -\frac{1}{\sqrt{2}} [2(x' - y') + 4(x' + y')] = -\frac{1}{\sqrt{2}} (6x' + 2y')$$

Assim:

$$x^2 + y^2 - z^2 + 2xy - 2x - 4y - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2x'^2 - z'^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}(6x' + 2y') = 1 \Leftrightarrow$$

$$2\left(x'^2 - \frac{3}{\sqrt{2}}x'\right) - z'^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}y' = 1 \Leftrightarrow$$

$$2\left(x' - \frac{3}{2\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{9}{8} - z'^2 - \sqrt{2}y' = 1 \Leftrightarrow$$



$$2\left(x' - \frac{3}{2\sqrt{2}}\right)^2 - z'^2 - \sqrt{2}y' = 1 + \frac{9}{4} = \frac{13}{4} \Leftrightarrow$$

$$\left(x' - \frac{3}{2\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{z'^2}{2} = \frac{y'}{\sqrt{2}} + \frac{13}{8} = \frac{y' + \frac{13}{4\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}$$

Isto é uma parabolóide hiperbólica, com centro:

$(x'_0, y'_0, z'_0) = \left(\frac{3}{2\sqrt{2}}, -\frac{13}{4\sqrt{2}}, 0\right)$. Em os coordenados antigos:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{13}{4\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} + \frac{13}{8} \\ \frac{3}{4} - \frac{13}{8} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{19}{8} \\ -\frac{7}{8} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quem diria...

3. (471) 2 pts. (Projeção ortogonal.) Uma aplicação linear, f , é dado por:

$$f(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e} - \mathbf{x}$$

onde \mathbf{e} é um vetor de unidade dado (fixo).

- Fazer uma figura indicando os vetores \mathbf{e} , \mathbf{x} e $f(\mathbf{x})$.
- Mostre que a imagem do f é perpendicular em \mathbf{e} .
- Seja \mathbf{i} e \mathbf{j} dois vetores unitários e ortogonais. Pondo: $\mathbf{e} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$. Encontrar o matriz, $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, de f em relação ao base (\mathbf{i}, \mathbf{j}) .

Solution:

-
- $f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e} = ((\mathbf{x} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{e} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e})(\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}) - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}) - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}) = 0$.
- $f(\mathbf{i}) = (\mathbf{i} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e} - \mathbf{i} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}\right) - \mathbf{i} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j} - \mathbf{i} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$,
 $f(\mathbf{j}) = (\mathbf{j} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e} - \mathbf{j} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}\right) - \mathbf{j} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j} - \mathbf{j} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

Assim o matriz é:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$



Data: 08/07/2009
Semestre:
Curso: Engenharia Civil e Computação
Disciplina: Álgebra Linear
Prova: III

1. (410) 4 pts. Em \mathbb{R}^4 são dado os vetores:

$$\underline{\mathbf{d}}_1 = (1, 2, 2, 0)^T \quad \underline{\mathbf{d}}_2 = (0, 1, 1, 1)^T \quad \underline{\mathbf{d}}_3 = (0, 0, 1, 1)^T \quad \underline{\mathbf{d}}_4 = (1, 1, 1, 1)^T$$

- (a) Mostre que $\underline{\mathbf{d}}_1, \underline{\mathbf{d}}_2, \underline{\mathbf{d}}_3, \underline{\mathbf{d}}_4$ formam uma base em \mathbb{R}^4 .
(b) Uma aplicação linear, $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é dado por:

$$f(\underline{\mathbf{d}}_1) = (1, 1, 2)^T \quad f(\underline{\mathbf{d}}_2) = (3, -1, 1)^T \quad f(\underline{\mathbf{d}}_3) = (4, 0, 3)^T \quad f(\underline{\mathbf{d}}_4) = (-5, 3, 0)^T$$

Encontrar a matriz do f em respeito ao base $\underline{\mathbf{d}}_i$ em \mathbb{R}^4 e a base canônica em \mathbb{R}^3 .

- (c) Encontrar a matriz do f em respeito ao base canônica em \mathbb{R}^4 e \mathbb{R}^3 .
(d) Encontrar a dimensão do imagem do f .
(e) Dados os vetores: $\underline{\mathbf{v}}_1 = \underline{\mathbf{d}}_1 + \underline{\mathbf{d}}_2 - \underline{\mathbf{d}}_3$ e $\underline{\mathbf{v}}_2 = -\underline{\mathbf{d}}_1 + 2\underline{\mathbf{d}}_2 + \underline{\mathbf{d}}_4$.
Mostre que: $\ker f = \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^4 \mid f(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\mathbf{0}}\} = \text{ger}(\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2)$.
(f) Encontrar a solução completa da equação: $f(\underline{\mathbf{x}}) = f(\underline{\mathbf{d}}_1)$.

Solution:

(410) 4 pts. Em \mathbb{R}^4 são dado os vetores:

$$\underline{\mathbf{d}}_1 = (1, 2, 2, 0)^T \quad \underline{\mathbf{d}}_2 = (0, 1, 1, 1)^T \quad \underline{\mathbf{d}}_3 = (0, 0, 1, 1)^T \quad \underline{\mathbf{d}}_4 = (1, 1, 1, 1)^T$$

(a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \rho = 4$$

Ou seja, $\underline{\mathbf{d}}_1, \underline{\mathbf{d}}_2, \underline{\mathbf{d}}_3, \underline{\mathbf{d}}_4$ formam uma base em \mathbb{R}^4 .

(b) Em respeito ao base canônica em \mathbb{R}^4 e \mathbb{R}^3 o matriz é (a imagem dos $\underline{\mathbf{d}}_i$ em colunas):

$$\underline{\mathbf{A}}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Temos: $\underline{\mathbf{A}}' = \underline{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{D}}$ \Leftrightarrow $\underline{\mathbf{A}} = \underline{\mathbf{A}}' \underline{\mathbf{D}}^{-1}$. Calculamos a matriz inversa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & | & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & | & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & | & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & | & 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & | & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & | & 2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & | & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \sim$$



$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right) \Rightarrow \underline{\underline{\mathbf{D}}}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Multiplicando:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}'}} \underline{\underline{\mathbf{D}}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -1 & \frac{11}{2} & -\frac{3}{2} \\ 4 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & -2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(d) A dimensão da imagem é o posto: $\rho_A = \rho_{A'}$ (pois mudar de base não altera a dimensão). Escolhamos $\underline{\underline{\mathbf{A}'}}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -5 \\ 0 & -4 & -4 & 8 \\ 0 & -5 & -5 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Segue que a dimensão da imagem é 2.

(e) Primeiramente: $\dim \mathbb{R}^4 = \dim \text{Im}(f) + \dim \ker f$. Ou seja: $\dim \ker f = 4 - 2 = 2$.

Formamos as imagens:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3-4 & -1+6-5 \\ 1-1 & -1-2+3 \\ 2+1-3 & -2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Segue, que $f(\underline{\mathbf{v}}_1) = f(\underline{\mathbf{v}}_2) = \underline{\mathbf{0}}$, ou seja: $\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2 \in \ker f$. Por $\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2$ serem linearmente independentes, concluímos: $\ker f = \text{ger}(\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2)$.

(f) Encontrar a solução completa da equação: $f(\underline{\mathbf{x}}) = f(\underline{\mathbf{d}}_1)$.

Trivialmente a equação $f(\underline{\mathbf{x}}) = f(\underline{\mathbf{d}}_1)$ tem a solução $\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{d}}_1$, assim sendo uma solução particular. Assim a solução completa é $\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{d}}_1 + \ker f$, ou seja:

$$\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{d}}_1 + t\underline{\mathbf{v}}_1 + s\underline{\mathbf{v}}_2, \quad t, s \in \mathbb{R}$$

2. (403) 4 pts. Dado a superfície:

$$(*) \quad 3x^2 - 3y^2 + 12xz + 12yz + 4x - 4y - 2z = 0$$

- Encontrar a parte linear do (*), $F_1(x, y, z)$.
- Encontrar a parte quadrática do (*), $F_2(x, y, z)$, e escreve-a na forma matricial: $\mathbf{r}^T \underline{\underline{\mathbf{A}}} \mathbf{r}$.
- Encontrar autovalores e autovetores da matriz $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$.
- Encontrar uma base ortonormal, $\underline{\mathbf{d}}_i$, de autovetores da $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$.
- Encontrar uma substituição ortogonal, $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$, e uma matriz diagonal, $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$, tal que: $\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{D}}}^T \underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\underline{\mathbf{D}}}$.
- Transformar, usando o item anterior, F_2 em uma forma quadrática sem termos mistos.
- Encontrar $F_1(x, y, z)$ em termos dos coordenados novos.
- Classificar (*) geometricamente.

Solution:

- $F_1(x, y, z) = 4x - 4y - 2z$.



(b) $F_2(x, y, z) = 3x^2 - 3y^2 + 12xz + 12yz$. De forma matricial:

$$(x \ y \ z) \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 6 \\ 6 & 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 6 \\ 0 & -3-\lambda & 6 \\ 6 & 6 & -\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} -3-\lambda & 6 \\ 6 & -\lambda \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} 0 & -3-\lambda \\ 6 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)[\lambda(-3-\lambda) - 36] + 6[0 - 6(-3-\lambda)] = \dots = -\lambda^3 + 81\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 81) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda_1 = 9 \vee \lambda_2 = -9 \vee \lambda_3 = 0$$

(d) Encontrar uma base ortonormal, $\underline{\mathbf{d}}_i$, de autovetores da $\underline{\mathbf{A}}$.

i. $\lambda_1 = 9$:

$$\underline{\mathbf{A}} - 9\underline{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 6 \\ 0 & -12 & 6 \\ 6 & 6 & -9 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}} \Leftrightarrow x_1 = x_3 = 2x_2 \Leftrightarrow$$

$$\underline{\mathbf{x}} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

Normalizamos: $\underline{\mathbf{v}}_1 = \frac{1}{3}(2, 1, 2)$.

ii. $\lambda_2 = -9$:

$$\underline{\mathbf{A}} - 9\underline{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 9 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}} \Leftrightarrow x_3 = -x_2 \wedge x_3 = -2x_1 \Leftrightarrow$$

$$\underline{\mathbf{x}} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

Normalizamos: $\underline{\mathbf{v}}_2 = \frac{1}{3}(1, 2, -2)$. Verificamos: $\underline{\mathbf{v}}_1 \cdot \underline{\mathbf{v}}_2 = 0$.

iii. $\lambda_3 = 0$:

Podemos resolver como para os autovalores anteriores, porém é mais fácil utilizar que $\underline{\mathbf{v}}_3 \perp \underline{\mathbf{v}}_1$ e $\underline{\mathbf{v}}_3 \perp \underline{\mathbf{v}}_2$, ou seja: $\underline{\mathbf{v}}_3 \parallel \underline{\mathbf{v}}_1 \times \underline{\mathbf{v}}_2$:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (-6, 6, 3) \parallel (-2, 2, 1)$$

Normalizamos: $\underline{\mathbf{v}}_3 = \frac{1}{3}(-2, 2, 1)$.

Suggestion: Verifique que $\underline{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{v}}_i = \lambda_i \underline{\mathbf{v}}_i$.

(e) Organizando os autovetores normalizados em colunas:

$$\underline{\mathbf{D}} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{\mathbf{D}}^{-1} = \underline{\mathbf{D}}^T = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

O matrix neste base é os autovalores na diagonal:

$$\underline{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

E vale: $\underline{\mathbf{B}} = \underline{\mathbf{D}}^T \underline{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{D}}$.



(f) $F_2(x, y, z) = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 = 9x'^2 - 9y'^2$.

(g) Usamos a relação entre coordenados velhos e coordenados novos: $\underline{\mathbf{r}} = \underline{\mathbf{D}} \underline{\mathbf{r}'}$:

$$\underline{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2x' + y' - 2z' \\ x' + 2y' + 2z' \\ 2x' - 2y' + z' \end{pmatrix}$$

Assim: $F_1(x, y, z) = \frac{1}{3} (4(2x' + y' - 2z') - 4(x' + 2y' + 2z') - 2(2x' - 2y' + z')) =$
 $\frac{1}{3} ((8 - 4 - 4)x' + (4 - 8 + 4)y' + (-8 - 8 - 2)z') = -6z'$ e eixos paralelos com os vetores $\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2$ e $\underline{\mathbf{v}}_3$.

(h) (*) é equivalente à:

$$9x'^2 - 9y'^2 - 6z' = 0 \Leftrightarrow 6z' = 9x'^2 - 9y'^2$$

Isto é uma parabolóide hiperbólica com centro em $(x', y', z') = (x, y, z) = (0, 0, 0)$.

3. (442) 2 pts. Seja $\underline{\mathbf{a}}$ e $\underline{\mathbf{b}}$ vetores fixos em \mathbb{R}^3 que satisfaz:

$$|\underline{\mathbf{a}}| = |\underline{\mathbf{b}}| = \sqrt{2} \quad \underline{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{b}} = 1$$

A aplicação, f , é dado por:

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\mathbf{a}} \times \underline{\mathbf{x}} + (\underline{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{x}})\underline{\mathbf{b}}$$

(a) Mostrar que f é uma aplicação linear.

No resto deste exercício, pomos: $\underline{\mathbf{c}} = \underline{\mathbf{a}} \times \underline{\mathbf{b}}$

(b) Mostre $\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}}, \underline{\mathbf{c}}$ formam uma base em \mathbb{R}^3 . Mostre que o matrix ao respeito desde base é dado por:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Informamos, que para o produto vetorial duplo, vale:

$$\underline{\mathbf{a}} \times (\underline{\mathbf{b}} \times \underline{\mathbf{c}}) = (\underline{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{c}})\underline{\mathbf{b}} - (\underline{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{b}})\underline{\mathbf{c}}$$

(c) Encontrar autovalores e autovetores do f .

(d) Encontrar a dimensão da imagem e uma base da mesma.

Solution:

(a) i. $f(\underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{y}}) = \underline{\mathbf{a}} \times (\underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{y}}) + (\underline{\mathbf{a}} \cdot (\underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{y}}))\underline{\mathbf{b}} = \underline{\mathbf{a}} \times \underline{\mathbf{x}} + (\underline{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{x}})\underline{\mathbf{b}} + \underline{\mathbf{a}} \times \underline{\mathbf{y}} + (\underline{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{y}})\underline{\mathbf{b}} = f(\underline{\mathbf{x}}) + f(\underline{\mathbf{y}})$,

ii. $f(\alpha \underline{\mathbf{x}}) = \underline{\mathbf{a}} \times (\alpha \underline{\mathbf{x}}) + (\underline{\mathbf{a}} \cdot (\alpha \underline{\mathbf{x}}))\underline{\mathbf{b}} = \alpha [\underline{\mathbf{a}} \times \underline{\mathbf{x}} + (\underline{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{x}})\underline{\mathbf{b}}] = \alpha f(\underline{\mathbf{x}})$,

O que mostre que f é linear.

(b) Sendo $\underline{\mathbf{a}}$ e $\underline{\mathbf{b}}$ linearmente independentes, o vetor $\underline{\mathbf{c}}$ é ortogonal dos dois, e assim $\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}}, \underline{\mathbf{c}}$ são linearmente independentes.

Para encontrar o matrix desde base, procuramos as imagens dos vetores básicas:

i. $f(\underline{\mathbf{a}}) = \underline{\mathbf{a}} \times \underline{\mathbf{a}} + (\underline{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{a}})\underline{\mathbf{b}} = (\underline{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{a}})\underline{\mathbf{b}} = 2\underline{\mathbf{b}} = [0, 2, 0]$

ii. $f(\underline{\mathbf{b}}) = \underline{\mathbf{a}} \times \underline{\mathbf{b}} + (\underline{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{b}})\underline{\mathbf{b}} = \underline{\mathbf{c}} + \underline{\mathbf{b}} = [0, 1, 1]$

iii. $f(\underline{\mathbf{c}}) = \underline{\mathbf{a}} \times \underline{\mathbf{c}} + (\underline{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{c}})\underline{\mathbf{b}} = \underline{\mathbf{a}} \times \underline{\mathbf{c}} = \underline{\mathbf{a}} \times (\underline{\mathbf{a}} \times \underline{\mathbf{b}}) = (\underline{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{b}})\underline{\mathbf{a}} - (\underline{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{a}})\underline{\mathbf{b}} = \underline{\mathbf{a}} - 2\underline{\mathbf{b}} = [1, -2, 0]$

Pondo estes resultados em colunas, obtemos o matrix do f :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



(c)

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} &= -\lambda \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1-\lambda \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - \lambda + 2) + 2 = \\
 -\lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda + 2 &= -\lambda^2(\lambda - 1) - 2(\lambda - 1) = (-\lambda^2 - 2)(\lambda - 1) = 0
 \end{aligned}$$

Assim, temos somente uma autovalor real, sendo: $\lambda = 1$. Calculando os autovetores de $\lambda = 1$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\mathbf{x}} = t(1, 1, 1)^T, \quad t \in \mathbb{R}$$

(d) Por $\lambda = 0$ não ser autovalor, temos que o núcleo do f contém somente a vetor nula, ou seja: $\dim \ker f = 0$. Assim: $\dim \operatorname{Im} f = 3 - 0 = 3$.

Como uma base da imagem podíamos usar $\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}}, \underline{\mathbf{c}}$, pois eles são linearmente independentes, cf. item (a).



Data: 06/10/2009
Semestre: 2009.2
Curso: *
Disciplina: Álgebra Linear
Prova: I

1. (390) 4 pts. Dado o matriz:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$$

- Encontrar $\det \underline{\underline{\mathbf{A}}}$ para qualquer valor de λ .
- Para quais valores de λ $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ é singular?
- Para $\lambda = 1$ encontrar o matriz adjunto de $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$.
- Para $\lambda = 2$ encontrar o matriz inversa de $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$.
- Para $\lambda = 0$ resolver o sistema homogêneo (1) : $\underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\underline{\mathbf{x}}} = \underline{\underline{\mathbf{0}}}$. Encontrar a dimensão e uma base desse espaço solucional.
- Para $\lambda = 3$ resolver o sistema homogêneo (2) : $\underline{\underline{\mathbf{A}}}\underline{\underline{\mathbf{x}}} = \underline{\underline{\mathbf{0}}}$. Encontrar a dimensão e uma base desse espaço solucional.
- Mostre que qualquer vetor do espaço solucional de (1) é ortogonal em qualquer vetor do espaço solucional de (2).

Solution:

(a)

$$P(\lambda) = \det \underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ \lambda-3 & 3-\lambda & 0 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(3-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1-\lambda & -1 \\ -1 & 0 & -0 \\ -1 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) [(1-\lambda)(2-\lambda) - 2] = -\lambda(3-\lambda)^2$$

(b)

$$\det \underline{\underline{\mathbf{A}}} = -\lambda(3-\lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \vee \lambda = 3$$

(c) Calculando os subdeterminantes:

$$(D_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

E os co-fatores:

$$(A_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Este matriz é o adjunto, pois por $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ ser simétrico, não precisamos transpor.

(d)

$$\left(\underline{\underline{\mathbf{A}}} | \underline{\underline{\mathbf{I}}} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right) = \left(\underline{\underline{\mathbf{I}}} | \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} \right)$$



(e)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\mathbf{x}} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

Ou seja: a dimensão do espaço solucionál é 1 e uma base da mesma: $\underline{\mathbf{v}}_1 = (1, 1, 1)^T$.

(f)

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\mathbf{x}} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t, s \in \mathbb{R}$$

Ou seja: a dimensão do espaço solucionál é 2 e uma base da mesma: $\underline{\mathbf{v}}_2 = (-1, 0, 1)^T$ e $\underline{\mathbf{v}}_3 = (-1, 1, 0)^T$.

(g) E somente notar, que: $\underline{\mathbf{v}}_1 \cdot \underline{\mathbf{v}}_2 = \underline{\mathbf{v}}_1 \cdot \underline{\mathbf{v}}_3 = 0$.

2. (387) 2 pts. Dado os vetores:

$$\underline{\mathbf{a}}_1 = (0, 1, 2, 2, 0)^T \quad \underline{\mathbf{a}}_2 = (1, 1, 4, 0, 0)^T \quad \underline{\mathbf{a}}_3 = (1, 2, 6, 2, 1)^T \quad \underline{\mathbf{a}}_4 = (-1, 2, 2, 6, -1)^T$$

(a) Mostrar que $\underline{\mathbf{a}}_1, \underline{\mathbf{a}}_2, \underline{\mathbf{a}}_3$ são linearmente independentes.

(b) Escrever $\underline{\mathbf{a}}_4$ como uma combinação linear de $\underline{\mathbf{a}}_1, \underline{\mathbf{a}}_2, \underline{\mathbf{a}}_3$

Solution:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Na redução anterior as primeiras três colunas mostram que $\underline{\mathbf{a}}_1, \underline{\mathbf{a}}_2, \underline{\mathbf{a}}_3$ são linearmente independentes.

(b) Da última coluna segue: $\underline{\mathbf{a}}_4 = 4\underline{\mathbf{a}}_1 - \underline{\mathbf{a}}_3$

3. (371) 4 pts. Dado o matriz e o vetor::

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1+a & 0 & 1 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \\ b \end{pmatrix}, b \in \mathbb{R}$$

Considerando o sistema linear:

$$(*) \quad \underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}$$

(a) Encontrar $\det \underline{\underline{\mathbf{A}}}$ para qualquer $a \in \mathbb{R}$.

(b) Encontrar o posto do matriz $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ para qualquer $a \in \mathbb{R}$.

(c) Encontrar o posto do matriz total do sistema (*) para qualquer $a, b \in \mathbb{R}$ e no cada caso a dimensão do espaço solucionál.

(d) Resolver o sistema (*) para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$.

Solution:

(a)

$$\det \underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1+a & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2a-1 \end{vmatrix} = (a-1)(2a+1)$$



(b) Da redução anterior segue:

$$\rho_{\underline{A}} = \begin{cases} 3 & a = 1 \vee a = -\frac{1}{2} \\ 4 & a \neq 1 \wedge a \neq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

(c)

$$\underline{\underline{T}} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & b \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+a & 0 & 1 & b \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 1-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2a+1 & ab \end{array} \right)$$

$$\rho_{\underline{\underline{T}}} = \begin{cases} 3 & a = 1 \wedge b \in \mathbb{R} \\ 3 & a = -\frac{1}{2} \wedge b = 0 \\ 4 & a = -\frac{1}{2} \wedge b \neq 0 \\ 4 & a \neq 1 \wedge a \neq -\frac{1}{2} \wedge b \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(d) Caso I: $a = 1 \wedge b \in \mathbb{R}$.

$n - \rho = 4 - 3 = 1$ parâmetros.

$$\underline{\underline{T}} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & b \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{b}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{b}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{b}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Pondo: $x_3 = t$ obtemos: $x_1 = t$ e $x_2 = x_4 = \frac{b}{3}$, ou seja:

$$\underline{\underline{x}} = \left(0, \frac{b}{3}, 0, \frac{b}{3}\right)^T + t(1, 0, 1, 0)^T, \quad t \in \mathbb{R}$$

Caso II: $a = -\frac{1}{2} \wedge b = 0$.

$n - \rho = 4 - 3 = 1$ parâmetros.

$$\underline{\underline{T}} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Pondo $x_4 = t$ obtemos: $x_2 = -2t$ e $x_1 = x_3 = 0$, ou seja:

$$\underline{\underline{x}} = t(0, -2, 0, 1)^T, \quad t \in \mathbb{R}$$

Caso III: $a = -\frac{1}{2} \wedge b \neq 0$.

Neste caso não ha solução, pois: $\rho_{\underline{A}} = 3 < \rho_{\underline{\underline{T}}} = 4$.

Caso IV: $a \neq 1 \wedge a \neq -\frac{1}{2} \wedge b \in \mathbb{R}$.

$n - \rho = 4 - 4 = 0$ parâmetros, isto é: solução única:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 1-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2a+1 & ab \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{ab}{2a+1} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{b}{2a+1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{ab}{2a+1} \end{array} \right)$$

Assim:

$$\underline{\underline{x}} = \left(0, \frac{b}{2a+1}, 0, \frac{ab}{2a+1}\right)^T = \frac{b}{2a+1}(0, 1, 0, a)^T$$



Data: 13/10/2009
Semestre: 2009.2
Curso: Estatística
Disciplina: Álgebra Linear
Prova: I - 2ª Chamada

1. 4 pts. Dado o matriz, $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, e o vetor, $\underline{\underline{\mathbf{b}}}$:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 1 & a-1 & 2 & a+2 \\ 1 & 2a & 0 & a \\ 0 & -a-1 & 2a+2 & 0 \\ 0 & 2a+2 & 4a-4 & a^2+a-8 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{\mathbf{b}}} = \begin{pmatrix} a+b \\ 2a+b \\ 0 \\ 4a+ab+b \end{pmatrix}$$

E o sistema linear:

$$(*) : \underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\underline{\mathbf{x}}} = \underline{\underline{\mathbf{b}}}$$

- Encontrar o posto da matriz coeficiente, $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, por qualquer valor de $a \in \mathbb{R}$.
- Encontrar o posto da matriz aumentada, $\underline{\underline{\mathbf{T}}} = (\underline{\underline{\mathbf{A}}|\underline{\underline{\mathbf{b}}})$, por quaisquer valores de $a, b \in \mathbb{R}$.
- Encontrar os valores (a, b) tal que o sistema $(*)$ não tem solução.
- Encontrar os valores (a, b) tal que o sistema $(*)$ tem solução única.
- Encontrar os valores (a, b) tal que o sistema $(*)$ tem infinitas solução.
- Resolver o sistema $(*)$ para $(a, b) = (-1, 1)$. Identificar nesta solução a solução completa do sistema homogênea (SCSH) e uma solução particular do sistema inhomogênea (SPSñH).

Solution:

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}} = (\underline{\underline{\mathbf{A}}|\underline{\underline{\mathbf{b}}}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a-1 & 2 & a+2 & a+b \\ 1 & 2a & 0 & a & 2a+b \\ 0 & -a-1 & 2a+2 & 0 & 0 \\ 0 & 2a+2 & 4a-4 & a^2+a-8 & 4a+ab+b \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a-1 & 2 & a+2 & a+b \\ 0 & a+1 & -2 & -2 & a \\ 0 & -a-1 & 2a+2 & 0 & 0 \\ 0 & 2a+2 & 4a-4 & a^2+a-8 & 4a+ab+b \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a-1 & 2 & a+2 & a+b \\ 1 & a+1 & -2 & -2 & a \\ 0 & 0 & 2a & -2 & a \\ 0 & 0 & 4a & a^2+a-4 & 2a+ab+b \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a-1 & 2 & a+2 & a+b \\ 1 & a+1 & -2 & -2 & a \\ 0 & 0 & 2a & -2 & a \\ 0 & 0 & 0 & a(a+1) & b(a+1) \end{array} \right) \sim$$

(a) Vemos que:

$$\rho_{\underline{\underline{\mathbf{A}}}} = \begin{pmatrix} 2 & \text{por} & a = -1 \\ 3 & \text{por} & a = 0 \\ 4 & \text{por} & a \neq 0 \wedge a \neq -1 \end{pmatrix}$$

(b) E:

$$\rho_{\underline{\underline{\mathbf{T}}}} = \begin{pmatrix} 2 & \text{por} & a = -1 \wedge b \in \mathbb{R} \\ 3 & \text{por} & a = 0 \wedge b = 0 \\ 4 & \text{por} & a = 0 \wedge b \neq 0 \\ 4 & \text{por} & a \neq 0 \wedge a \neq -1 \wedge b \in \mathbb{R} \end{pmatrix}$$

- $(*)$ não tem solução, seeee: $\rho_{\underline{\underline{\mathbf{T}}}} > \rho_{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}$, ou seja: $a = 0 \wedge b \neq 0$.
- $(*)$ tem solução único, seeee: $\rho_{\underline{\underline{\mathbf{T}}}} = \rho_{\underline{\underline{\mathbf{A}}}} = 4$, ou seja: $a \neq 0 \wedge a \neq -1 \wedge b \in \mathbb{R}$.
- $(*)$ tem infinitas solução único, seeee: $\rho_{\underline{\underline{\mathbf{T}}}} = \rho_{\underline{\underline{\mathbf{A}}}} < 4$, ou seja: $a = -1 \wedge b \in \mathbb{R}$ ou: $a = 0 \wedge b = 0$.



(f) No caso $9a, b) = (-1, 1)$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Parametrizando: $x_2 = t$ e $x_4 = s$:

$$x_1 = 2x_2 + x_4 - 1 = 2t + s - 1$$

E:

$$x_3 = -x_4 + \frac{1}{2} = -s + \frac{1}{2}$$

Juntando vetorialmente, obtemos a solução completa:

$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t, s \in \mathbb{R}$$

2. 3 pts. Dado os vetores:

$$\underline{\mathbf{a}}_1 = (1, -1, 2, 1)^T \quad \underline{\mathbf{a}}_2 = (0, 1, 1, 3)^T \quad \underline{\mathbf{a}}_3 = (1, -2, 2, -1)^T \quad \underline{\mathbf{a}}_4 = (0, 1, -1, 3)^T \quad \underline{\mathbf{a}}_5 = (1, -2, 2, -3)^T$$

- Mostre que $\underline{\mathbf{a}}_1, \underline{\mathbf{a}}_2, \underline{\mathbf{a}}_3, \underline{\mathbf{a}}_4$ formam uma base de \mathbb{R}^4 .
- Encontrar os coordenados do vetor $\underline{\mathbf{a}}_5$ neste base.
- Encontrar os coordenados dos vetores $\underline{\mathbf{a}}_1, \underline{\mathbf{a}}_2, \underline{\mathbf{a}}_3, \underline{\mathbf{a}}_4$ neste base.
- Encontrar os coordenados dos vetores $\underline{\mathbf{a}}_1, \underline{\mathbf{a}}_2, \underline{\mathbf{a}}_3, \underline{\mathbf{a}}_4$ no base canônica.

Solution:

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 3 & -3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 3 & -4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 6 & -4 \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

- Do cálculo anterior segue que $\underline{\mathbf{a}}_1, \underline{\mathbf{a}}_2, \underline{\mathbf{a}}_3, \underline{\mathbf{a}}_4$ formam uma base de \mathbb{R}^4 .
- Do cálculo anterior também segue que os coordenados do vetor $\underline{\mathbf{a}}_5$ neste base, é: $\underline{\mathbf{a}}_5 = [2, -1, -1, -1]_{\underline{\mathbf{a}}_i} = 2\underline{\mathbf{a}}_1 - \underline{\mathbf{a}}_2 - \underline{\mathbf{a}}_3 - \underline{\mathbf{a}}_4$.
- Temos:

$$\underline{\mathbf{a}}_1 = [1, 0, 0, 0]_{\underline{\mathbf{a}}_i}^T$$

$$\underline{\mathbf{a}}_2 = [0, 1, 0, 0]_{\underline{\mathbf{a}}_i}^T$$

$$\underline{\mathbf{a}}_3 = [0, 0, 1, 0]_{\underline{\mathbf{a}}_i}^T$$

$$\underline{\mathbf{a}}_4 = [0, 0, 0, 1]_{\underline{\mathbf{a}}_i}^T$$



(d) No base canônica:

$$\underline{\mathbf{a}}_1 = (1, -1, 2, 1)^T$$

$$\underline{\mathbf{a}}_2 = (0, 1, 1, 3)^T$$

$$\underline{\mathbf{a}}_3 = (1, -2, 2, -1)^T$$

$$\underline{\mathbf{a}}_4 = (0, 1, -1, 3)^T$$

3. 3 pts. Dado as matrizes:

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Mostre que $\underline{\mathbf{B}}$ é regular.

(b) Encontrar $\underline{\mathbf{B}}^{-1}$.

(c) Resolver a equação matricial: $\underline{\mathbf{X}} \underline{\mathbf{B}} = \underline{\mathbf{A}}$.

Solution:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right) \sim \end{aligned}$$

(a) O cálculo anterior mostre que $\underline{\mathbf{B}}$ é regular.

(b) Também segue deste cálculo:

$$\underline{\mathbf{B}}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

(c) Por $\underline{\mathbf{B}}$ ser regular, temos:

$$\underline{\mathbf{X}} \underline{\mathbf{B}} = \underline{\mathbf{A}} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\mathbf{X}} = \underline{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{B}}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



Data: 16/10/2009
Semestre: 2009.2
Curso: Física
Disciplina: Álgebra Linear
Prova: I - 2ª Chamada

1. 4 pts. Dado o matriz, $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, e o vetor, $\underline{\underline{\mathbf{b}}}$:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2a & a \\ 1 & a & 2a & 1 \\ 1 & 1 & a & 2a \\ 1 & a & a & 2a \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{\mathbf{b}}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$$

E o sistema linear:

$$(*) : \underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\underline{\mathbf{x}}} = \underline{\underline{\mathbf{b}}}$$

- Encontrar o posto da matriz coefficiente, $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, por qualquer valor de $a \in \mathbb{R}$.
- Encontrar o posto da matriz aumentada, $\underline{\underline{\mathbf{T}}} = (\underline{\underline{\mathbf{A}}|\underline{\underline{\mathbf{b}}})$, por qualquer valores de $a \in \mathbb{R}$.
- Encontrar os valores a tal que o sistema $(*)$ não tem solução.
- Encontrar os valores a tal que o sistema $(*)$ tem solução única.
- Encontrar os valores a tal que o sistema $(*)$ tem infinitas soluções.
- Resolver o sistema $(*)$ para $a = 1$.
- Identificar na solução do item anterior a solução completa do sistema homogênea (SCSH) e uma solução particular do sistema inhomogênea (SPSñH).

Solution:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{T}}} &= (\underline{\underline{\mathbf{A}}|\underline{\underline{\mathbf{b}}}) = \\ &\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2a & a & 1 \\ 1 & a & 2a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 2a & 1 \\ 1 & a & a & 2a & a \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2a & a & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & -a & a & 0 \\ 0 & a-1 & -a & a & a-1 \end{array} \right) \sim \\ &\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2a & a & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & -a & a & 0 \\ 0 & 0 & -a & 2a-1 & a-1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2a & a & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & -a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & a-1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

(a) Do cálculo anterior:

$$\rho_{\underline{\underline{\mathbf{A}}}} = \begin{cases} 2 & \text{por } a = 1 \\ 3 & \text{por } a = 0 \\ 4 & \text{por } a \neq 0 \wedge a \neq 1 \end{cases}$$

(b) Do cálculo anterior:

$$\rho_{\underline{\underline{\mathbf{T}}}} = \begin{cases} 2 & \text{por } a = 1 \\ 3 & \text{por } a = 0 \\ 4 & \text{por } a \neq 0 \wedge a \neq 1 \end{cases}$$

Ou seja: $\rho_{\underline{\underline{\mathbf{A}}}} = \rho_{\underline{\underline{\mathbf{T}}}}$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

- Por $\rho_{\underline{\underline{\mathbf{A}}}} = \rho_{\underline{\underline{\mathbf{T}}}}$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $(*)$ sempre tem solução.
- $(*)$ tem solução única quando: $n = \rho$, ou seja: $a \neq 0 \wedge a \neq 1$.



- (e) (*) tem infinitas soluções quando: $n < \rho$, ou seja: $a = 0 \vee a = 1$.
(f) Colocando $a = 1$ e omitindo linhas com somente zeros:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Pondo: $x_2 = t$ e $x_4 = s$: $x_1 = 1 - x_2 - 3x_4 = 1 - t - 3s$, e $x_3 = x_4 = s$. Assim, a solução completa é:

$$\underline{x} = (1, 0, 0, 0)^T + t(-1, 1, 0, 0)^T + s(-3, 0, 1, 1)^T, \quad t, s \in \mathbb{R}$$

2. 3 pts. Dado os vetores:

$$\underline{a}_1 = (1, 0, -1)^T \quad \underline{a}_2 = (1, 1, 1)^T \quad \underline{a}_3 = (1, -1, 1)^T$$

- (a) Mostre que $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ formam uma base de \mathbb{R}^3 .
(b) Encontrar uma equação expressando coordenados em relação à base $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$, em termos dos coordenados em relação à base canônica em \mathbb{R}^3 .
(c) Encontrar os coordenados dos vetores básicos da base canônica em \mathbb{R}^3 , na base $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$.

Solution:

$$\begin{aligned} (\underline{\mathbf{A}}|\underline{\mathbf{I}}) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right) \sim \\ &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array} \right) = (\underline{\mathbf{I}}|\underline{\mathbf{A}}^{-1}) \end{aligned}$$

- (a) O cálculo anterior mostre que $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ formam uma base em \mathbb{R}^3 .
(b) A relação entre coordenados novos e antigos, é: $\underline{x}_A = \underline{\mathbf{A}} \underline{x}_N$, ou equivalentemente: $\underline{x}_A = \underline{\mathbf{A}}^{-1} \underline{x}_N$. Pela cálculo anterior:

$$\underline{x}_N = \underline{\mathbf{A}}^{-1} \underline{x}_A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \underline{x}_A$$

- (c) Os coordenados novos dos vetores básicas antigas, estão nas colunas da inversa:

$$\begin{aligned} \underline{e}_1 &= (1, 0, 0)^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}_{\underline{\mathbf{a}}}^T \\ \underline{e}_2 &= (0, 1, 0)^T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}_{\underline{\mathbf{a}}}^T \\ \underline{e}_3 &= (0, 0, 1)^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}_{\underline{\mathbf{a}}}^T \end{aligned}$$

3. 3 pts. Dado a matriz:

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Mostre que $\underline{\mathbf{A}}$ é singular.
(b) Resolver a sistema homogênea: $\underline{\mathbf{A}} \underline{x} = \underline{\mathbf{0}}$.



(c) Resolver a equação matricial: $\underline{\underline{A}} \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{A}}^2$.

Hint: Pode ser conveniente usar, que $\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{A}}$ é uma solução particular da equação matricial.

Solution:

(a)

$$\det \underline{\underline{A}} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 1 = 0$$

Ou seja $\underline{\underline{A}}$ é singular.

(b)

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ou seja: $x = y = -z = t$. De forma vetorial: $\underline{\underline{x}} = t(1, 1, -1)^t$, $t \in \mathbb{R}$.

(c) Pelo item anterior, a solução completa da: $\underline{\underline{A}} \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{0}}$, é:

$$\underline{\underline{X}} = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ -t_1 & -t_2 & -t_3 \end{pmatrix}$$

Justificando o *hint*, que $\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{A}}$ é uma solução particular: $\underline{\underline{A}} \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}^2$, e aplicando: $\text{SCS}\hat{n}\text{H} = \text{SPS}\hat{n}\text{H} + \text{SCSH}$, obtemos a solução completa da: $\underline{\underline{A}} \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{A}}^2 \underline{\underline{x}}$:

$$\underline{\underline{X}} = \begin{pmatrix} t_1 & 1 + t_2 & 1 + t_3 \\ 1 + t_1 & -1 + t_2 & t_3 \\ 1 - t_1 & -t_2 & 1 - t_3 \end{pmatrix}$$



Data: 19/10/2009
Semestre: 2009.2
Curso: Engenharia Mecânica
Disciplina: Álgebra Linear
Prova: I - 2ª Chamada

1. 4 pts. Dado as matrizes, $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ e $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & a & 1 \\ 2 & a+2 & a-2 \\ 1 & a+1 & a-1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{\mathbf{b}}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ b & b \\ b-1 & 2b+1 \end{pmatrix}$$

E a equação:

$$(*) : \underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\underline{\mathbf{X}}} = \underline{\underline{\mathbf{B}}}$$

- Encontrar o posto da matriz coefficiente, $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, por qualquer valor de $a \in \mathbb{R}$.
- Encontrar o posto da matriz augmentada, $\underline{\underline{\mathbf{T}}} = (\underline{\underline{\mathbf{A}}|\underline{\underline{\mathbf{B}}})$, por quaisquer valores de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
- Encontrar os valores (a, b) tal que a equação (*) não tem solução (incompatível).
- Encontrar os valores (a, b) tal que a equação (*) tem solução única (determinado).
- Encontrar os valores (a, b) tal que a equação (*) tem infinitas soluções (indeterminado).
- Resolver a equação (*) para $(a, b) = (2, 0)$.

Solution:

Calculamos:

$$\begin{aligned} (\underline{\underline{\mathbf{A}}|\underline{\underline{\mathbf{B}}})} &= \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & a & 1 & -2 & 2 \\ 2 & a+2 & a-2 & b & b \\ 1 & a+1 & a-1 & b-1 & 2b+1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & a & 1 & -2 & 2 \\ 0 & a & a & b-2 & b+2 \\ 0 & a & a & b-2 & 2b+2 \end{array} \right) \sim \\ &\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & a & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & a-1 & b & b \\ 0 & 0 & a-1 & b & 2b \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & a & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & a-1 & b & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{array} \right) \end{aligned}$$

E a equação matricial:

$$(*) : \underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\underline{\mathbf{X}}} = \underline{\underline{\mathbf{B}}}$$

(a) Vemos:

$$\rho_{\underline{\underline{\mathbf{A}}}} = \begin{cases} 2 & \text{por } a = 1 \\ 2 & \text{por } a = 0 \\ 3 & \text{por } a \neq 0 \wedge a \neq 1 \end{cases}$$

(b) E mais:

$$\rho_{\underline{\underline{\mathbf{T}}}} = \begin{cases} \rho_{\underline{\underline{\mathbf{A}}}} & \text{por } b = 0 \\ \rho_{\underline{\underline{\mathbf{A}}}} + 1 & \text{por } b \neq 0 \end{cases}$$

- Do item (b) segue que (*) não tem solução, see: $b \neq 0$.
- Do item (b) segue que (*) tem solução única, see: $a \neq 0 \wedge a \neq 1 \wedge b = 0$.
- Do item (b) segue que (*) tem infinitas soluções, see: $(a = 0 \vee a = 1) \wedge b = 0$.



(f) Colocando $(a, b) = (2, 0)$ (caso de solução única):

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Ou seja:

$$\underline{\underline{\mathbf{X}}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. 3 pts. Dado as matrizes:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{\mathbf{B}}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- (a) Encontrar $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1}$.
- (b) Encontrar $\underline{\underline{\mathbf{B}}}^{-1}$.
- (c) Encontrar $(\underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\underline{\mathbf{B}}})^{-1}$.

Solution:

(a) Calculamos:

$$(\underline{\underline{\mathbf{A}}}\underline{\underline{\mathbf{I}}}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) = (\underline{\underline{\mathbf{I}}}\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1})$$

(b)

$$(\underline{\underline{\mathbf{B}}}\underline{\underline{\mathbf{I}}}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array} \right) = (\underline{\underline{\mathbf{I}}}\underline{\underline{\mathbf{B}}}^{-1})$$

(c) Temos:

$$(\underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\underline{\mathbf{B}}})^{-1} = \underline{\underline{\mathbf{B}}}^{-1} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

3. 3 pts. Dado os vetores:

$$\underline{\mathbf{d}}_1 = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)^T \quad \underline{\mathbf{d}}_2 = \frac{1}{2}(-1, 1, -1, 1)^T \quad \underline{\mathbf{d}}_3 = \frac{1}{2}(-1, -1, 1, 1)^T \quad \underline{\mathbf{d}}_4 = \frac{1}{2}(-1, 1, 1, -1)^T \quad \underline{\mathbf{d}}_5 = (1, 2, 1, 2)^T$$

- (a) Mostre que $(\underline{\mathbf{d}}_1, \underline{\mathbf{d}}_2, \underline{\mathbf{d}}_3, \underline{\mathbf{d}}_4)$ formam uma base *ortonormal* em \mathbb{R}^4 .
- (b) Encontrar os coordenados do vetor $\underline{\mathbf{d}}_5$ em relação a base $(\underline{\mathbf{d}}_1, \underline{\mathbf{d}}_2, \underline{\mathbf{d}}_3, \underline{\mathbf{d}}_4)$.
- (c) Encontrar os coordenados dos vetores da base canônica, $(\underline{\mathbf{e}}_1, \underline{\mathbf{e}}_2, \underline{\mathbf{e}}_3, \underline{\mathbf{e}}_4)$, em relação a base $(\underline{\mathbf{d}}_1, \underline{\mathbf{d}}_2, \underline{\mathbf{d}}_3, \underline{\mathbf{d}}_4)$.



Solution:

(a) Verificamos:

$$\underline{\mathbf{d}}_i \cdot \underline{\mathbf{d}}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{por } i = j \\ 0 & \text{por } i \neq j \end{cases}$$

Ou seja $\underline{\mathbf{d}}_1, \underline{\mathbf{d}}_2, \underline{\mathbf{d}}_3, \underline{\mathbf{d}}_4$ são ortonormais. Por serem mutuamente ortogonais, $\underline{\mathbf{d}}_1, \underline{\mathbf{d}}_2, \underline{\mathbf{d}}_3, \underline{\mathbf{d}}_4$ são linearmente independentes, e assim formam uma base em \mathbb{R}^4 .

Por $\underline{\mathbf{d}}_1, \underline{\mathbf{d}}_2, \underline{\mathbf{d}}_3, \underline{\mathbf{d}}_4$ serem ortonormais, temos: $\underline{\mathbf{D}}^{-1} = \underline{\mathbf{D}}^T$. As relações entre os coordenados novos, $\underline{\mathbf{x}}'$, e os coordenados antigos, $\underline{\mathbf{x}}$, são:

$$\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{D}} \underline{\mathbf{x}}' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underline{\mathbf{x}}' \Leftrightarrow \underline{\mathbf{x}}' = \underline{\mathbf{D}}^{-1} \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{D}}^T \underline{\mathbf{x}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underline{\mathbf{x}}$$

(b)

$$\underline{\mathbf{d}}'_5 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(c) Os coordenados dos vetores da base canônica estão nas colunas do inverso:

$$\underline{\mathbf{e}}'_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \underline{\mathbf{e}}'_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{\mathbf{e}}'_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{\mathbf{e}}'_4 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$



Data: 08/12/2009
Semestre: 2009.2
Curso: Física
Disciplina: Álgebra Linear
Prova: II - 1ª Chamada

1. 4 pts. Dado a forma quadrática:

$$F_2(x, y, z) = 6y^2 + 12xz$$

- (a) Encontrar uma matriz simétrica, tal que: $F(\underline{x}) = \underline{x}^T \underline{\underline{A}} \underline{x}$, onde $\underline{x} = (x, y, z)$.
(b) Encontrar os autovalores do $\underline{\underline{A}}$.
(c) Encontrar os autovetores do $\underline{\underline{A}}$.
(d) Encontrar uma base ortonormal de autovetores do $\underline{\underline{A}}$.
(e) Encontrar uma matriz ortogonal, $\underline{\underline{D}}$, e uma matriz diagonal, $\underline{\underline{B}}$, tal que: $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{D}}^{-1} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{D}}$.
(f) Com esta substituição ortogonal, encontre uma relação entre os coordenados novos, \underline{x}' , e os coordenados antigos, \underline{x} , e vice-versa.
(g) Encontrar $F_2'(\underline{x}') = F_2(\underline{x})$.
(h) Classifique a superfície:

$$6y^2 + 12xz + 2x - 2y + 2z = 3$$

Solution:

(a)

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

E: $F_2(x, y, z) = \underline{x}^T \underline{\underline{A}} \underline{x}$.

(b)

$$\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 6 \\ 0 & 6 - \lambda & 0 \\ 6 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (6 - \lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 6 \\ 6 & -\lambda \end{vmatrix} = (6 - \lambda)(\lambda^2 - 36) = 0 \Leftrightarrow \\ \lambda = 6 \vee \lambda = -6$$

(c) $\lambda = 6$:

$$\underline{\underline{A}} - 6\underline{\underline{I}} = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{x} = \underline{0} \Leftrightarrow \\ -x_1 + x_3 = 0 \Leftrightarrow \underline{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t, s \in \mathbb{R}$$

$\lambda = -6$: Os autovetores são ortogonais aos dois autovetores de $\lambda = 6$, ou seja:

$$\underline{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

(d) Os autovetores do $\lambda = 6$ já são ortogonais e ambos ortogonais ao autovetor do $\lambda = -6$. Normalizando:

$$\underline{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$



(e) Colocando os \underline{v}_i em colunas:

$$\underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \underline{\underline{D}}^T$$

E:

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

(f)

$$\underline{\underline{x}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \underline{\underline{x}}' \Leftrightarrow \underline{\underline{x}}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \underline{\underline{x}}$$

(g) $F_2'(\underline{\underline{x}}') = 6x_1^2 + 6y_1^2 - 6z_1^2$.

(h) Pelos itens anteriores:

$$\begin{aligned} x &= \frac{x_1 + z_1}{\sqrt{2}} \\ y &= y_1 \\ z &= \frac{x_1 - z_1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Assim:

$$2x - 2y + 2z = \sqrt{2}x_1 - 2y_1$$

A forma quadrática se transforma em:

$$\begin{aligned} 6x_1^2 + 6y_1^2 - 6z_1^2 + \sqrt{2}x_1 - 2y_1 &= 3 \Leftrightarrow \\ 6\left(x_1^2 + \frac{\sqrt{2}}{6}x_1\right) + 6\left(y_1^2 - \frac{1}{3}y_1\right) - 6z_1^2 &= 3 \Leftrightarrow \\ 6\left(x_1 + \frac{\sqrt{2}}{12}\right)^2 - \frac{1}{12} + 6\left(y_1 - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{6} - 6z_1^2 &= 3 \Leftrightarrow \\ 6\left(x_1 + \frac{\sqrt{2}}{12}\right)^2 + 6\left(y_1 - \frac{1}{6}\right)^2 - 6z_1^2 &= 3 + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{39}{12} \Leftrightarrow \\ \frac{\left(x_1 + \frac{\sqrt{2}}{12}\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{39}{72}}\right)^2} + \frac{\left(y_1 - \frac{1}{6}\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{39}{72}}\right)^2} - \frac{z_1^2}{\left(\sqrt{\frac{39}{72}}\right)^2} &= 1 \end{aligned}$$

Este superfície é uma hiperbolóide de revolução de uma folha. Semi-eixos: $a = b = c = \sqrt{\frac{39}{72}}$, e centro: $(x_1, y_1, z_1) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{12}, \frac{1}{6}, 0\right)$, ou: $(x, y, z) = \left(-\frac{1}{12}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{12}\right)$. Eixo de revolução paralelo com o eixo z_1 , ou seja: $(1, 0, -1)^T$. Parametrização:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

2. 2 pts. Dado a matriz:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

E a aplicação linear: $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3 : f(\underline{\underline{x}}) = \underline{\underline{A}} \underline{\underline{x}}$.



- (a) Encontrar o núcleo de f e sua dimensão.
(b) Encontrar a dimensão e uma base da imagem da f .
(c) Pondo, $\underline{d} = (1, 2, 1)^T$, encontrar a solução completa de: $f(\underline{x}) = f(\underline{d})$.

Solution:

(a)

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 9 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & 9 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{x} = \underline{0}$$

Temos: $\rho = 2$, assim a dimensão do núcleo é $3 - 2 = 1$, e:

$$x_1 = -x_3 \wedge x_2 = 0 \Leftrightarrow \underline{x} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

- (b) A dimensão da imagem é $\rho = 2$. Uma base da imagem seria dois vetores LI das colunas da $\underline{\underline{A}}$, por exemplo:

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- (c) Obviamente \underline{d} é uma solução particular da equação. Obtemos a solução completa adicionando a solução completa da equação homogênea, ou seja: $\underline{x} = \underline{d} + t(-1, 0, 1)^T, t \in \mathbb{R}$.

3. 2 pts. Dado a matriz:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 10 & -2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & 6 \end{pmatrix}$$

E uma função bilinear: $g(x, y) = (x \ y) \underline{\underline{A}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

- (a) Encontrar os autovalores e autovetores do $\underline{\underline{A}}$.
(b) Mostre que $g(x, y)$ define um produto interno em \mathbb{R}^2 .
(c) Dado o vetor $\underline{v}_1 = (1, -1)^T$, encontrar um vetor, \underline{v}_2 ortogonal ao \underline{v}_1 ao respeito de g .
(d) Encontrar uma base ortonormal ao respeito do produto interno g .

Solution:

(a)

$$\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = \begin{vmatrix} 10 - \lambda & -2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & 6 - \lambda \end{vmatrix} = (10 - \lambda)(6 - \lambda) - 12 = 48 - 16\lambda - \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 12 \vee \lambda = 4$$

$\lambda = 4$:

$$\underline{\underline{A}} - 4\underline{\underline{I}} = \begin{pmatrix} 6 & -2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{x} = \underline{0} \Leftrightarrow \underline{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

O autovetor do $\lambda = 12$ é ortogonal e é o autovetor do $\lambda = 4$:

$$\underline{x} = t \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

- (b) $g(x, y)$ é claramente bilinear. É simétrica também porque $\underline{\underline{A}}$ é. Finalmente é positivamente definido, pois ambos autovalores são positivos.



(c) Calculamos:

$$\underline{\underline{A}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 + 2\sqrt{3} \\ -6 - 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

O versor deste é ortogonal ao $(1, -1)^T$ ao respeito do g :

$$\begin{pmatrix} 6 + 2\sqrt{3} \\ 10 + 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

(d) Podíamos normalizar (ao resp. do g) os vetores no item anterior, porém é mais fácil normalizar os autovetores do primeiro item, dividindo por seu complemento vezes o raiz do autovalor. Os autovetores normalizados ao respeito do produto escalar normal:

$$\underline{\underline{v}}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{v}}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix},$$

Dividindo com os $\sqrt{12}$ resp. 2: :

$$\underline{\underline{v}}_1 = \frac{1}{2\sqrt{12}} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{v}}_2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix},$$



Data: 08/12/2009
Semestre: 2009.2
Curso: Estatística
Disciplina: Álgebra Linear
Prova: II - 1ª Chamada

1. 4 pts. Dado a forma quadrática:

$$F_2(x, y, z) = 4z^2 + 8xy$$

- (a) Encontrar uma matriz simétrica, tal que: $F(\underline{x}) = \underline{x}^T \underline{A} \underline{x}$, onde $\underline{x} = (x, y, z)$.
(b) Encontrar os autovalores do \underline{A} .
(c) Encontrar os autovetores do \underline{A} .
(d) Encontrar uma base ortonormal de autovetores do \underline{A} .
(e) Encontrar uma matriz ortogonal, \underline{D} , e uma matriz diagonal, \underline{B} , tal que: $\underline{B} = \underline{D}^{-1} \underline{A} \underline{D}$.
(f) Com esta substituição ortogonal, encontre uma relação entre os coordenados novos, \underline{x}' , e os coordenados antigos, \underline{x} , e vice-versa.
(g) Encontrar $F_2'(\underline{x}') = F_2(\underline{x})$.
(h) Classifique a superfície:

$$4z^2 + 8xy + 2x - 2y = 3$$

Solution:

(a)

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

E: $F_2(x, y, z) = \underline{x}^T \underline{A} \underline{x}$.

(b)

$$\det(\underline{A} - \lambda \underline{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 4 & 0 \\ 4 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = (4 - \lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 4 \\ 4 & -\lambda \end{vmatrix} = (4 - \lambda)(\lambda^2 - 16) = 0 \Leftrightarrow \\ \lambda = 4 \vee \lambda = -4$$

(c) $\lambda = 4$:

$$\underline{A} - 4\underline{I} = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{x} = \underline{0} \Leftrightarrow \\ -x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow \underline{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t, s \in \mathbb{R}$$

$\lambda = -4$: Os autovetores são ortogonais aos dois autovetores de $\lambda = 4$, ou seja:

$$\underline{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

(d) Os autovetores do $\lambda = 4$ já são ortogonais e ambos ortogonais ao autovetor do $\lambda = -4$. Normalizando:

$$\underline{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



(e) Colocando os \underline{v}_i em colunas:

$$\underline{D} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

E:

$$\underline{B} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

(f)

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underline{x}' \Leftrightarrow \underline{x}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underline{x}$$

(g) $F'_2(\underline{x}') = 4x_1^2 + 4y_1^2 - 4z_1^2$.

(h) Pelos itens anteriores:

$$\begin{aligned} x &= \frac{x_1 - z_1}{\sqrt{2}} \\ y &= \frac{x_1 + z_1}{\sqrt{2}} \\ z &= y_1 \end{aligned}$$

Assim:

$$2x - 2y = -\sqrt{2}z_1$$

A forma quadrática se transforma em:

$$\begin{aligned} 4x_1^2 + 4y_1^2 - 4z_1^2 - \sqrt{2}z_1 &= 3 \Leftrightarrow \\ x_1^2 + y_1^2 - z_1^2 - \frac{\sqrt{2}}{4}z_1 &= \frac{3}{4} \Leftrightarrow \\ x_1^2 + y_1^2 - \left[z_1^2 + \frac{\sqrt{2}}{4}z_1 \right] &= \frac{3}{4} \Leftrightarrow \\ x_1^2 + y_1^2 - \left[\left(z_1 + \frac{\sqrt{2}}{8} \right)^2 - \frac{1}{32} \right] &= \frac{3}{4} \Leftrightarrow \\ x_1^2 + y_1^2 - \left(z_1 + \frac{\sqrt{2}}{8} \right)^2 &= \frac{3}{4} - \frac{1}{32} = \frac{23}{32} \end{aligned}$$

Esta superfície é uma hiperbolóide de revolução de uma folha. Semi-eixos: $a = b = c = \frac{\sqrt{23}}{32}$, e centro: $(x_1, y_1, z_1) = (0, 0, -\frac{\sqrt{2}}{8})$, ou: $(x, y, z) = (\frac{1}{8}, -\frac{1}{8}, 0)$. Eixo de revolução paralelo com o eixo z_1 , ou seja: $(-1, 1, 0)^T$. Parametrização:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

2. 2 pts. Dado a matriz:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

E a aplicação linear: $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3 : f(\underline{x}) = \underline{A} \underline{x}$.



- (a) Encontrar o núcleo de f e sua dimensão.
(b) Encontrar a dimensão e uma base da imagem da f .
(c) Pondo, $\underline{d} = (1, -1, 0)^T$, encontrar a solução completa de: $f(\underline{x}) = f(\underline{d})$.

Solution:

(a)

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{x} = \underline{0}$$

Temos: $\rho = 2$, assim a dimensão do núcleo é $3 - 2 = 1$, e:

$$x_1 = x_3 \wedge x_2 = -2x_3 \Leftrightarrow \underline{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

- (b) A dimensão da imagem é $\rho = 2$. Uma base da imagem seria dois vetores LI das colunas da $\underline{\underline{A}}$, por exemplo:

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- (c) Obviamente \underline{d} é uma solução particular da equação. Obtemos a solução completa adicionando a solução completa da equação homogênea, ou seja: $\underline{x} = \underline{d} + t(1, -2, 1)^T, t \in \mathbb{R}$.

3. 2 pts. Dado a matriz:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 7 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 5 \end{pmatrix}$$

E uma função bilinear: $g(x, y) = (x \ y) \underline{\underline{A}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

- (a) Encontrar os autovalores e autovetores do $\underline{\underline{A}}$.
(b) Mostre que $g(x, y)$ define um produto interno em \mathbb{R}^2 .
(c) Dado o vetor $\underline{v}_1 = (1, -1)^T$, encontrar um vetor, \underline{v}_2 ortogonal ao \underline{v}_1 ao respeito de g .
(d) Encontrar uma base ortonormal ao respeito do produto interno g .

Solution:

(a)

$$\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = \begin{vmatrix} 7 - \lambda & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 5 - \lambda \end{vmatrix} = (7 - \lambda)(5 - \lambda) - 3 = 32 - 12\lambda + \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 8 \vee \lambda = 4$$

$\lambda = 4$:

$$\underline{\underline{A}} - 4\underline{\underline{I}} = \begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{x} = \underline{0} \Leftrightarrow \underline{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

O autovetor do $\lambda = 8$ é ortogonal no autovetor do $\lambda = 4$:

$$\underline{x} = t \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

- (b) $g(x, y)$ é claramente bilinear. É simétrica também porque $\underline{\underline{A}}$ é. Finalmente é positivamente definido, pois ambos autovalores são positivos.



(c) Calculamos:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 + \sqrt{3} \\ -5 - \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

O versor deste é ortogonal ao $(1, -1)^T$ ao respeito do g :

$$\begin{pmatrix} 5 + \sqrt{3} \\ 7 + \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

(d) Podíamos normalizar (ao resp. do g) os vetores no item anterior, porém é mais fácil normalizar os autovetores do primeiro item, dividindo por seu complemento vezes o raiz do autovalor. Os autovetores normalizados ao respeito do produto escalar normal:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix},$$

Dividindo com os $\sqrt{8}$ resp. 2:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{2\sqrt{8}} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix},$$



Data: 15/12/2009
Semestre: 2009.2
Curso: Física
Disciplina: Álgebra Linear
Prova: II - 2ª Chamada

1. 3 pts. Dado os vetores:

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Uma aplicação linear, $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ é dado por:

$$f(\underline{v}_1) = \underline{v}_2 - \underline{v}_3 \quad f(\underline{v}_2) = \underline{v}_1 - \underline{v}_3 \quad f(\underline{v}_3) = \underline{v}_2 - \underline{v}_1$$

- Mostre que os vetores \underline{v}_i formam uma base em \mathbb{R}^3 .
- Encontrar o matriz de f na base \underline{v}_i .
- Encontrar o matriz de f na base canônica, \underline{e}_i .

Solution:

(a)

$$\left(\underline{\underline{V}} \mid \underline{\underline{I}} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right) = \left(\underline{\underline{I}} \mid \underline{\underline{V}}^{-1} \right)$$

Mostrando que os \underline{v}_i formam uma base de \mathbb{R}^3 .

(b) Colocamos as imagens dos vetores básicos nas coluns do $\underline{\underline{B}}$:

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Temos: $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{V}}^{-1} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{V}} \Leftrightarrow \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{V}} \underline{\underline{B}} \underline{\underline{V}}^{-1}$:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. 2 pts. Dado a matriz:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

E a aplicação linear: $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3 : f(\underline{x}) = \underline{\underline{A}} \underline{x}$.

- Encontrar autovalores e autovetores do $\underline{\underline{A}}$.
- Encontrar uma base ortonormal de autovetores da $\underline{\underline{A}}$ e o matriz de f neste base.

Solution:



(a)

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} - \lambda \underline{\underline{\mathbf{I}}} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 1 \\ -2 & 5-\lambda & -2 \\ 1 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 2-2\lambda \\ 1 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 5 \\ 1 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 7) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \vee \lambda = 7$$

Onde $\lambda = 7$ é raiz simples e $\lambda = 1$ é raiz simples.

$\lambda = 1$:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} - \underline{\underline{\mathbf{I}}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x_2 = t \wedge x_3 = s \wedge x_1 = 2t - s \Leftrightarrow \mathbf{x} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, t, s \in \mathbb{R}$$

Por $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ ser simétrica o autovetor do raiz simples, $\lambda = 7$ é ortogonal do ambos autovetores acima, ou seja:

$$\mathbf{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

(b) Escolhemos:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \sim \lambda = 7$$

E:

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \sim \lambda = 1$$

E:

$$\mathbf{v}_3 \parallel \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \sim \lambda = 1$$

Normalizando:

$$\underline{\underline{\mathbf{D}}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

E:

$$\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. 3 pts. Dado a forma quadrática:

$$F(x, y) = 7x^2 - 2\sqrt{3}xy + 5y^2$$

(a) Encontrar uma matriz simétrica, $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, tal que: $F(x, y) = (x \ y) \underline{\underline{\mathbf{A}}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

O tanto do seu Cristo, mas tão pouco dos seus Cristões
 Por que seus Cristões não podem ser mais como seu Cristo?

Mahatma Gandhi



- (b) Encontrar autovetores e autovalores da $\underline{\mathbf{A}}$.
(c) Encontrar uma substituição ortogonal, $\underline{\mathbf{D}}$, que transforma F em uma forma sem o termo xy .
(d) Classificar a curva: $7x^2 - 2\sqrt{3}xy + 5y^2 + x = 4$.

Solution:

(a)

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 7 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 5 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\det(\underline{\mathbf{A}} - \lambda \underline{\mathbf{I}}) = \begin{vmatrix} 7 - \lambda & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 5 - \lambda \end{vmatrix} = (7 - \lambda)(5 - \lambda) - 3 = 32 - 12\lambda + \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 8 \vee \lambda = 4$$

$\lambda = 4$:

$$\underline{\mathbf{A}} - 4\underline{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}} \Leftrightarrow \underline{\mathbf{x}} = t \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

O autovetor do $\lambda = 8$ é ortogonal no autovetor do $\lambda = 4$:

$$\underline{\mathbf{x}} = t \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

(c) Substituição ortogonal:

$$\underline{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

E:

$$F(x, y) = 7x^2 - 2\sqrt{3}xy + 5y^2 = 4x'^2 + 8y'^2$$

(d)

$$\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{D}}\underline{\mathbf{x}}' \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \underline{\mathbf{x}}' = \begin{pmatrix} \frac{x' - \sqrt{3}y'}{2} \\ \frac{\sqrt{3}x' + y'}{2} \end{pmatrix} \right)$$

$$7x^2 - 2\sqrt{3}xy + 5y^2 + x = 4 \Leftrightarrow$$

$$4x'^2 + 8y'^2 + \frac{x' - \sqrt{3}y'}{2} = 4 \Leftrightarrow$$

$$4 \left[x'^2 + \frac{x'}{8} \right] + 8 \left[y'^2 - \frac{\sqrt{3}y'}{16} \right] = 4 \Leftrightarrow$$

$$4 \left[\left(x' + \frac{1}{16} \right)^2 - \frac{1}{64} \right] + 8 \left[\left(y' - \frac{\sqrt{3}}{32} \right)^2 - \frac{3}{256} \right] = 4 \Leftrightarrow$$

$$4 \left[\left(x' + \frac{1}{16} \right)^2 \right] - \frac{1}{16} + 8 \left[\left(y' - \frac{\sqrt{3}}{32} \right)^2 \right] - \frac{3}{32} = 4 \Leftrightarrow$$

$$4 \left(x' + \frac{1}{16} \right)^2 + 8 \left(y' - \frac{\sqrt{3}}{32} \right)^2 = \frac{133}{32} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\left(x' + \frac{1}{16} \right)^2}{\left(\sqrt{\frac{133}{128}} \right)^2} + \frac{\left(y' - \frac{\sqrt{3}}{32} \right)^2}{\left(\sqrt{\frac{133}{256}} \right)^2} = 1$$

Isto é um elipse com semieixos $a = \sqrt{\frac{133}{128}}$ e $b = \sqrt{\frac{133}{256}}$ e centro: $(x', y') = \left(-\frac{1}{16}, \frac{\sqrt{3}}{32} \right)$. Transformando: $(x, y) = \left(\frac{1}{32}, 0 \right)$.

60
 Isto tanto do seu Cristo, mas tão pouco dos seus Cristões
 Por que seus Cristões não podem ser mais como seu Cristo?

Mahatma Gandhi



Data: 23/03/2010
Semestre: 2010.1
Curso: Matemática
Disciplina: Álgebra Linear
Prova: I

1. 2 pts. Dado a matriz:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ -a & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}$$

- (a) Encontrar o posto do $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.
- (b) Resolver a equação: $\underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\underline{\mathbf{x}}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.
- (c) Resolver a equação: $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^T \underline{\underline{\mathbf{x}}} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$ para todo $b \in \mathbb{R}$.
- (d) Identifique a solução completa do sistema homogênea (SCSH) e uma solução particular do sistema não homogênea (SPSñH) no item anterior.

Solution:

(a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ -a & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1+a^2 \end{pmatrix}$$

Dali segue: $\rho_A = 2$ para todo $a \in \mathbb{R}$, pois

$$\begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & 1+a^2 \end{vmatrix} = 1+a^2 \neq 0$$

(b) A sistema é equivalente à: $(a-1)y + (1+a^2)z = 0 \wedge x + y + az = 0$.

Para $a = 1$, obtemos: $z = 0 \wedge y = t \wedge x = -t$:

$$\underline{\underline{\mathbf{x}}} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Para $a \neq 1$, obtemos: $z = t \wedge y = \frac{1+a^2}{1-a}t \wedge x = \frac{1+a^2}{1-a}t + at = \frac{1+a}{1-a}t$.

$$\underline{\underline{\mathbf{x}}} = t \begin{pmatrix} \frac{1+a}{1-a} \\ \frac{1+a^2}{1-a} \\ 1 \end{pmatrix} = t' \begin{pmatrix} 1+a \\ 1+a^2 \\ 1-a \end{pmatrix}, \quad t' \in \mathbb{R}$$

(c)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -a & 0 \\ 1 & -1 & b \\ a & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -a & 0 \\ 0 & a-1 & b \\ 0 & 1+a^2 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -a & 0 \\ 0 & a-1 & b \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Vemos, que este sistema tem solução se e somente se: $b = 0$, e neste caso somente a solução trivial: $x = y = 0$.

(d) A solução particular no item anterior é a solução trivial, e a solução completa do sistema não homogêneo também.

2. 2 pts. Com o matriz no item anterior pomos:

$$\underline{\underline{\mathbf{B}}}_1 = \underline{\underline{\mathbf{A}}}^T \underline{\underline{\mathbf{A}}} \quad \underline{\underline{\mathbf{B}}}_2 = \underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^T$$



- (a) Calcular $\underline{\underline{\mathbf{B}}}_1$ e $\underline{\underline{\mathbf{B}}}_2$.
(b) Calcular os determinantes $\det \underline{\underline{\mathbf{B}}}_1$ e $\det \underline{\underline{\mathbf{B}}}_2$.
(c) Calcular as adjuntas $\underline{\underline{\mathbf{B}}}_1^*$ e $\underline{\underline{\mathbf{B}}}_2^*$.
(d) Justifique que o produto de uma matriz com sua transposta é uma matriz simétrica.

Solution:

(a)

$$\underline{\underline{\mathbf{B}}}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 1 & -1 \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ -a & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a^2 & 1+a & 0 \\ 1+a & 2 & a-1 \\ 0 & a-1 & 1+a^2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{B}}}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ -a & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 1 & -1 \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+a^2 & -1 \\ -1 & 2+a^2 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\det \underline{\underline{\mathbf{B}}}_1 = \begin{vmatrix} 1+a^2 & 1+a & 0 \\ 1+a & 2 & a-1 \\ 0 & a-1 & 1+a^2 \end{vmatrix} = (1+a^2) \begin{vmatrix} 2 & a-1 \\ a-1 & 1+a^2 \end{vmatrix} - (1+a) \begin{vmatrix} 1+a & 0 \\ a-1 & 1+a^2 \end{vmatrix} =$$

$$(1+a^2) [2+2a^2 - (a-1)^2] - (1+a) [(1+a)(1+a^2)] =$$

$$(1+a^2) [2+2a^2 - a^2 + 2a - 1] - (1+a)^2(1+a^2) =$$

$$(1+a^2) [a^2 + 2a + 1 - (a+1)^2] = 0$$

$$\det \underline{\underline{\mathbf{B}}}_2 = \begin{vmatrix} 2+a^2 & -1 \\ -1 & 2+a^2 \end{vmatrix} = (2+a^2)^2 - 1 = a^4 + 4a^2 + 3$$

(c) Por $\underline{\underline{\mathbf{B}}}_1$ ser simétrica, a adjunta também é:

$$C_{11} = A_{11} = 2(a^2 - 1) - (a-1)^2 = 2a^2 + 2 - a^2 + 2a - 1 = a^2 + 2a + 1 = (a-1)^2$$

$$C_{12} = -A_{12} = (a^2 + 1)(1+a)$$

$$C_{13} = A_{13} = (1+a)(a-1) = a^2 - 1$$

$$C_{22} = A_{22} = (a^2 + 1)^2$$

$$C_{23} = -A_{23} = (a^2 + 1)(a-1)$$

$$C_{33} = A_{33} = 2(a^2 + 1) - (a+1)^2 = a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2$$

Juntando:

$$\underline{\underline{\mathbf{B}}}_1^* = \begin{pmatrix} (a-1)^2 & (a^2+1)(1+a) & a^2-1 \\ (a^2+1)(1+a) & (a^2+1)^2 & (a^2+1)(a-1) \\ a^2-1 & (a^2+1)(a-1) & (a-1)^2 \end{pmatrix}$$

Mesmo por $\underline{\underline{\mathbf{B}}}_2$:

$$C_{11} = A_{11} = 2 + a^2$$

$$C_{12} = -A_{12} = 1$$

$$C_{22} = A_{22} = 2 + a^2$$

E juntando:

$$\underline{\underline{\mathbf{B}}}_2^* = \begin{pmatrix} 2+a^2 & 1 \\ 1 & 2+a^2 \end{pmatrix}$$



(d) Usando que: $(\underline{\underline{A}} \underline{\underline{B}})^T = \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{A}}^T$, verificamos: $(\underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}})^T = \underline{\underline{A}}^T (\underline{\underline{A}}^T)^T = \underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}}$.

3. 3 pts.

(a) Mostre que o determinante de ordem $n > 1$:

$$A_n = \begin{vmatrix} b & a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & b & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & b & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix}$$

satisfaz a fórmula de recursão: $A_n = bA_{n-1} - a^2A_{n-2}$, $n \geq 3$.

(b) Pondo $A_1 = b$, encontrar A_3 .

(c) Encontrar a determinante:

$$A = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

Solution:

(a) Expansão de Laplace na primeira linha:

$$A_n = \begin{vmatrix} b & a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & b & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & b & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} =$$

$$b \begin{vmatrix} a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & b & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & b & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} - a \begin{vmatrix} a & a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & b & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & b & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix}$$

$$= bA_{n-1} - a^2 \begin{vmatrix} a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a & b & a & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a & b & a \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = bA_{n-1} - a^2A_{n-2} \quad - \quad QED$$



(b) $A_1 = b$ e $A_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = b^2 - a^2$. Assim pela fórmula de recursão:

$$A_3 = b(b^2 - a^2) - a^2b = b^3 - 2a^2b.$$

(c) Similarmente:

$$A_4 = bA_3 - a^2A_2 = b^2(b^2 - 2a^2) - a^2(b^2 - a^2) = b^4 - 2a^2b^2 - a^2b^2 + a^4 = b^4 - 3a^2b^2 + a^4. \text{ Pondo } b = 2 - \lambda \text{ e } a = -1:$$

Encontrar a determinante:

$$A = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 - \lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 - \lambda & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)^4 - 3(2 - \lambda)^2 + 1 =$$

$$[2^4 - 4 \cdot 2^2\lambda + 6 \cdot 2^2\lambda^2 - 4 \cdot 2\lambda^3 + \lambda^4] - 3(4 - 4\lambda + \lambda^2) + 1 =$$

$$\lambda^4 - 8\lambda^3 + 21\lambda^2 + 44\lambda + 5$$

4. 3 pts. Dado a matriz:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & 0 & 1 \\ 2\alpha & 2\alpha & \alpha & 1 \\ 2\alpha & 3\alpha & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

(a) Encontrar o posto do $\underline{\underline{A}}$ por todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

(b) Por quais valores $\alpha \in \mathbb{R}$ $\underline{\underline{A}}$ é regular? Por estes valores, encontrar a inversa.

(c) Resolver a sistema:

$$\underline{\underline{A}} \underline{\underline{x}} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$$

para todos $\alpha, a, b \in \mathbb{R}$.

Solution:

(a)

$$\begin{pmatrix} \alpha & \alpha & 0 & 1 \\ 2\alpha & 2\alpha & \alpha & 1 \\ 2\alpha & 3\alpha & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vemos que o posto é 2 para $\alpha = 0$ e 4 para $\alpha \neq 0$.

(b) Pelo resultado no item anterior, $\underline{\underline{A}}$ tem inversa se e somente se: $\alpha \neq 0$. Encontramos a inversa:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} \alpha & \alpha & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2\alpha & 2\alpha & \alpha & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2\alpha & 3\alpha & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & \alpha & 1 & 0 & 1 & 0 & -2\alpha \\ 0 & \alpha & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2\alpha \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & -1 & 1 & 0 & -\alpha \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -\alpha \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim$$



$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\alpha^{-1} & \alpha^{-1} & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\alpha^{-1} & 0 & \alpha^{-1} & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\alpha^{-1} & \alpha^{-1} & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\alpha^{-1} & 0 & \alpha^{-1} & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \alpha^{-1} & 0 & -\alpha^{-1} & 2 \end{array} \right)$$

Trocando a ordem das linhas obtemos a inversa:

$$\left(\begin{array}{cccc} \alpha^{-1} & 0 & -\alpha^{-1} & 2 \\ -\alpha^{-1} & 0 & \alpha^{-1} & -1 \\ -\alpha^{-1} & \alpha^{-1} & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -\alpha \end{array} \right)$$

(c) Quanto a inversa existe ($\alpha \neq 0$), obtemos:

$$\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{A}}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 & -\alpha^{-1} & 2 \\ -\alpha^{-1} & 0 & \alpha^{-1} & -1 \\ -\alpha^{-1} & \alpha^{-1} & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-b)\alpha^{-1} \\ (-1+b)\alpha^{-1} \\ (-1+a)\alpha^{-1} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para $\alpha = 0$ obtemos:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Temos solução se e somente se: $a = b = 1$, e neste caso:

$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} t \\ -t \\ s \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t, s \in \mathbb{R}$$



Data: 30/03/2010
Semestre: 2010.1
Curso: Matemática
Disciplina: Álgebra Linear
Prova: I, 2ª Chamada

1. 4 pts. Dado a matriz:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 0 & -a & 0 & a \\ a & 0 & a & 0 \\ 0 & -a & 0 & -a \\ -a & 0 & a & 0 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}$$

- (a) Por quais valores $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ é regular? Para estes valores, encontrar a inversa: $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1}$.
(b) Por quais valores $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ é ortogonal, isto é: $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}^T$?
(c) Encontrar a matriz adjunta: $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^*$.
(d) Resolver a equação matricial: $\underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\underline{\mathbf{X}}} = \underline{\underline{\mathbf{0}}}$, onde $\underline{\underline{\mathbf{0}}} \in M^{4,4}$.

Solution:

(a)

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & -a & 0 & a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & -a & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -a & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & -a & 0 & a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2a & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2a & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & -a & 0 & a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & -a & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & a & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & a & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & a & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array} \right)$$

Segue, que o posto do $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ é maximal se e somente se $a \neq 0$, e neste caso:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2a} & 0 & -\frac{1}{2a} \\ -\frac{1}{2a} & 0 & -\frac{1}{2a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2a} & 0 & \frac{1}{2a} \\ \frac{1}{2a} & 0 & -\frac{1}{2a} & 0 \end{pmatrix}$$

- (b) $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}^T \Leftrightarrow \underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^T = \underline{\underline{\mathbf{I}}}$, calculando:

$$\begin{pmatrix} 0 & -a & 0 & a \\ a & 0 & a & 0 \\ 0 & -a & 0 & -a \\ -a & 0 & a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & -a \\ -a & 0 & -a & 0 \\ 0 & a & 0 & a \\ a & 0 & -a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a & 2a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2a^2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\mathbf{I}}} \Leftrightarrow 2a^2 = 1 \Leftrightarrow a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Isto é: $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ é ortogonal se e somente se: $a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.



(c) Da redução em item (a), segue que: $\det \underline{\underline{A}} = 4a^4$. Furthermore:

$$\underline{\underline{A}}^* = (\det \underline{\underline{A}}) \underline{\underline{A}}^{-1} = 4a^4 \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2a} & 0 & -\frac{1}{2a} \\ -\frac{1}{2a} & 0 & -\frac{1}{2a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2a} & 0 & \frac{1}{2a} \\ \frac{1}{2a} & 0 & -\frac{1}{2a} & 0 \end{pmatrix} = 2a^3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(d) De novo, quanto $a \neq 0$, $\underline{\underline{A}}$ é regular, isto é: $\underline{\underline{A}} \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{0}} \Leftrightarrow \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{0}} = \underline{\underline{0}}$.

Quando $a = 0$: $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{0}}$, neste caso qualquer matriz 4×4 é solução:

$$\underline{\underline{X}} = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ t_5 & t_6 & t_7 & t_8 \\ t_9 & t_{10} & t_{11} & t_{12} \\ t_{13} & t_{14} & t_{15} & t_{16} \end{pmatrix}, \quad t_1, \dots, t_{16} \in \mathbb{R}$$

2. 4 pts. Dado os planos em \mathbb{R}^3 :

$$\begin{aligned} (\alpha) : & x + y - 2z = 0 \\ (\beta) : & 2x - y + (3a - 4)z = 3 \\ (\gamma) : & ay - z = 1 \end{aligned}$$

- Para quais valores de $a \in \mathbb{R}$ os planos α, β e γ tem uma reta em comum?
- Para quais valores de $a \in \mathbb{R}$ os planos α, β e γ tem um ponto em comum?
- Para quais valores de $a \in \mathbb{R}$ os planos α, β e γ nenhum ponto em comum?
- Para $a = 1$ encontrar a intersecção: $\alpha \cap \beta$.
- Para $a = 1$ encontrar a intersecção: $\beta \cap \gamma$.
- Para $a = 1$ encontrar a intersecção: $\gamma \cap \alpha$.

Solution:

Juntando em uma matriz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 3a-4 & 3 \\ 0 & a & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3a & 3 \\ 0 & a & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -a & -1 \\ 0 & a & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -a & -1 \\ 0 & 0 & a^2 - 1 & a + 1 \end{array} \right)$$

Observamos:

(I) : $a = 1 : \rho_A = 2 \wedge \rho_T = 3$.

(II) : $a = -1 : \rho_A = \rho_T = 2$.

(III) : $a \neq \pm 1 : \rho_A = \rho_T = 3$.

- Os planos tem uma reta em comum, se e somente se: $\rho_A = \rho_T = n - 1 = 2$, ou seja: $a = -1$.
- Os planos tem um ponto em comum, se e somente se: $\rho_A = \rho_T = n = 3$, ou seja: $a \neq \pm 1$.
- Os planos tem um ponto em comum, se e somente se: $\rho_A < \rho_T$, ou seja: $a = 1$.
- Colocando $a = 1$ obtemos::

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right)$$

Pondo $z = t : x = 1 + t \wedge y = -1 + t$. De forma vetorial:

$$\underline{\underline{x}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$



(e)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Pondo $z = t : x = 2 + t \wedge y = 1 + t$. De forma vetorial:

$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

(f)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Pondo $z = t : x = -1 + t \wedge y = 1 + t$. De forma vetorial:

$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

3. 2 pts. Dado a matriz:

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a^2 - a \\ a & a & 1 & a^3 - 2a^2 + a \\ -1 & 3a & 0 & 2a^2 - 2a \\ a & 2a & 1 & a^3 - a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}$$

(a) Encontrar o posto $\rho_{\underline{\mathbf{A}}}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

(b) Por todo $a \in \mathbb{R}$ resolver a equação matricial: $\underline{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{X}} = \underline{\mathbf{A}}$.

Solution:

(a)

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a^2 - a \\ a & a & 1 & a^3 - 2a^2 + a \\ -1 & 3a & 0 & 2a^2 - 2a \\ a & 2a & 1 & a^3 - a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a^2 - a \\ 0 & a & 1 & -a^2 + a \\ 0 & 3a & 0 & 3a^2 - 3a \\ 0 & 2a & 1 & a^2 - a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a^2 - a \\ 0 & a & 1 & -a^2 + a \\ 0 & 0 & -3 & 6a^2 - 6a \\ 0 & 0 & -1 & 3a^2 - 3a \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a^2 - a \\ 0 & a & 1 & -a^2 + a \\ 0 & 0 & -3 & 6a^2 - 6a \\ 0 & 0 & -1 & 3a^2 - 3a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a^2 - a \\ 0 & a & 0 & 2a^2 - 2a \\ 0 & 0 & 0 & -3a^2 + 3a \\ 0 & 0 & -1 & 3a^2 - 3a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a^2 - a \\ 0 & a & 0 & 2a^2 - 2a \\ 0 & 0 & -1 & 3a^2 - 3a \\ 0 & 0 & 0 & -3a^2 + 3a \end{pmatrix}$$

Dai segue:

(I) : $a = 0 : \rho = 2$.

(II) : $a = 1 : \rho = 3$.

(III) : $a \neq 0, 1 : \rho = 4$.

(b) É claro, que em todos os casos a equação: $\underline{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{X}} = \underline{\mathbf{A}}$, tem *no mínimo* a solução: $\underline{\mathbf{X}} = \underline{\mathbf{I}}$.

Nos casos $a \neq 0, 1$ o posto do $\underline{\mathbf{A}}$ é maximal, assim temos solução única, ou seja solução completa: $\underline{\mathbf{X}} = \underline{\mathbf{I}}$.

Caso $a = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0 \end{pmatrix} \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}} \Leftrightarrow x_1 = x_3 = 0$$

Assim, x_2 e x_4 são parâmetros livres (dois para cada coluna), dando a solução completa da equação matricial homogênea:



$$\underline{\underline{\mathbf{X}}}_H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \end{pmatrix}, \quad t_1, \dots, t_4, s_1, \dots, s_4 \in \mathbb{R}$$

Temos juma solução particular da equação (matricial) não homogênea: $\underline{\underline{\mathbf{X}}}_p = \underline{\underline{\mathbf{I}}}$, assim a solução completa da equação não homogênea é:

$$\underline{\underline{\mathbf{X}}} = \underline{\underline{\mathbf{I}}} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \end{pmatrix}, \quad t_1, \dots, t_4, s_1, \dots, s_4 \in \mathbb{R}$$

Completando com o caso $a = 1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Agora: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, deixando só uma parâmetro por coluna, x_4 , livre:

$$\underline{\underline{\mathbf{X}}}_H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \end{pmatrix}, \quad s_1, \dots, s_4 \in \mathbb{R}$$

E a solução completa da equação não homogênea:

$$\underline{\underline{\mathbf{X}}} = \underline{\underline{\mathbf{I}}} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \end{pmatrix}, \quad s_1, \dots, s_4 \in \mathbb{R}$$



Data: 06/04/2010
Semestre: 2010.1
Curso: Engenharia de Alimentos
Disciplina: Álgebra Linear
Prova: I

1. 2 pts. Calcular os determinantes:

(a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

(b)

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

Solution:

(a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -7 \\ 0 & -2 & -10 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & -2 & -8 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -3 & -7 \\ -2 & -10 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ -2 & -8 \end{vmatrix} = 30 - 14 - (24 - 8) = 16 - 16 = 0$$

(b)

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 7 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \\ -17 & -2 & 7 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -7 & 3 \\ 2 & -11 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$- \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -17 & -2 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 2 & -11 \end{vmatrix} = -(8 + 17) + 3(-11 + 14) = -25 + 9 = -16$$

2. 3 pts. Dado a matriz e os vetores:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{\mathbf{b}}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{\mathbf{b}}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(a) Mostre que a matriz $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ é regular.

(b) Resolver o sistema $\underline{\underline{\mathbf{A}}} \mathbf{x} = \underline{\underline{\mathbf{b}}}_1$.

(c) Resolver o sistema $\underline{\underline{\mathbf{A}}} \mathbf{x} = \underline{\underline{\mathbf{b}}}_2$.



Solution:

$$\left(\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & *1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & *1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & *1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & *1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

(a) O cálculo anterior mostra que $\underline{\underline{A}}$ é regular.

(b) Concluimos que a solução completa do sistema $\underline{\underline{A}} \underline{\underline{x}} = \underline{\underline{b}}_1$ é: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 1$.

(c) Concluimos que a solução completa do sistema $\underline{\underline{A}} \underline{\underline{x}} = \underline{\underline{b}}_2$ é: $x_1 = 1, x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$.

3. 2 pts. Considerando a matriz:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Encontrar $\det \underline{\underline{A}}$.

(b) Encontrar a matriz inversa: $\underline{\underline{A}}^{-1}$.

(c) Encontrar a matriz adjunta: $\underline{\underline{A}}^*$.

Solution:

(a)

$$\det \underline{\underline{A}} = \begin{vmatrix} 0 & *1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & *1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

(b) Por $\det \underline{\underline{A}} \neq 0$, a inversa existe. Calculamos:

$$\begin{aligned} (\underline{\underline{A}} | \underline{\underline{I}}) &= \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & *1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & *1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \\ & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) = (\underline{\underline{I}} | \underline{\underline{A}}^{-1}) \end{aligned}$$

(c) Temos:

$$\underline{\underline{A}}^* = (\det \underline{\underline{A}}) \underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{A}}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



4. 3 pts. Dado as matrizes:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{\mathbf{B}}} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -2 & -4 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- (a) Encontrar o posto da $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$.
(b) Resolver o sistema matricial: $\underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\underline{\mathbf{X}}} = \underline{\underline{\mathbf{B}}}$.
(c) Indicar no item anterior a solução completa do sistema homogênea e uma solução particular do sistema não-homogênea.

Solution:

(a)

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}} = (\underline{\underline{\mathbf{A}}} | \underline{\underline{\mathbf{B}}}) = \left(\begin{array}{cccc|cc} *1 & 1 & 0 & -1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -2 & -4 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 1 & 0 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & *1 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 3 & -3 \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 1 & 0 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & *1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 15 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Vemos que: $\rho_A = \rho_T = 3$.

- (b) Já que $\rho_A = \rho_T$, sabemos que o sistema matricial *tem* soluções, e mais: precisamos introduzir $n = \rho = 4 - 3 = 1$ parâmetro por coluna, para resolver-lo.

Resolvemos inicialmente o sistema homogênea: $\underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\underline{\mathbf{x}}} = \underline{\underline{\mathbf{0}}}$. Temos: $x_1 + x_2 = 0 \wedge x_3 = x_4 = 0$. Pondo $x_2 = t$: $x_1 = -t \wedge x_3 = x_4 = 0$.

Isto é:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\underline{\mathbf{x}}} = \underline{\underline{\mathbf{0}}} \Leftrightarrow \underline{\underline{\mathbf{x}}} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Similarmente para o sistema matricial homogênea: $\underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\underline{\mathbf{X}}} = \underline{\underline{\mathbf{0}}}$ com duas colunas:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\underline{\mathbf{X}}} = \underline{\underline{\mathbf{0}}} \Leftrightarrow \underline{\underline{\mathbf{X}}} = \begin{pmatrix} -t & -s \\ t & s \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad t, s \in \mathbb{R}$$

Pela redução do item anterior, sabemos que uma solução particular do sistema não-homogênea é:

$$\underline{\underline{\mathbf{X}}}_p = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ 0 & -9 \\ 1 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Adicionando a solução completa do sistema homogênea (SCSH) com a solução particular do sistema não-homogênea (SPSnH), obtemos finalmente a solução completa do sistema não-homogênea (SCSnH):

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\underline{\mathbf{X}}} = \underline{\underline{\mathbf{B}}} \Leftrightarrow \underline{\underline{\mathbf{X}}} = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ 0 & -9 \\ 1 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t & -s \\ t & s \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad t, s \in \mathbb{R}$$



(c) Repetindo comentários anteriores:

$$\underline{\underline{\mathbf{x}}}_p = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ 0 & -9 \\ 1 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

é uma solução particular do sistema não-homogênea. E:

$$\underline{\underline{\mathbf{x}}}_H = \begin{pmatrix} -t & -s \\ t & s \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad t, s \in \mathbb{R}$$

é a solução completa do sistema homogênea.



Data: 14/05/2010
Semestre: 2010.1
Curso: Engenharia de Alimentos
Disciplina: Álgebra Linear
Prova: II

1. 4 pts. Dados os vetores em \mathbb{R}^4 :

$$\underline{\mathbf{d}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{\mathbf{d}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{\mathbf{d}}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{\mathbf{d}}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \underline{\mathbf{d}}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Mostre que os vetores $\underline{\mathbf{d}}_1, \underline{\mathbf{d}}_2, \underline{\mathbf{d}}_3, \underline{\mathbf{d}}_4$ formam uma base em \mathbb{R}^4 .
- Encontre uma relação entre as coordenadas em relação a base canônica e a base $(\underline{\mathbf{d}}_1, \underline{\mathbf{d}}_2, \underline{\mathbf{d}}_3, \underline{\mathbf{d}}_4)$.
- Encontre as coordenadas do vetor $\underline{\mathbf{d}}_5$ na base $(\underline{\mathbf{d}}_1, \underline{\mathbf{d}}_2, \underline{\mathbf{d}}_3, \underline{\mathbf{d}}_4)$.
- Encontre as coordenadas antigas dos vetores básicos novos.
- Encontre as coordenadas novas dos vetores básicos antigos.

Solution:

(a)

$$\begin{aligned} (\underline{\mathbf{D}} | \underline{\mathbf{I}}) &= \left(\begin{array}{cccc|cccc} \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \\ & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \\ & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

(b) Temos: $\underline{\mathbf{x}}_A = \underline{\mathbf{D}} \underline{\mathbf{x}}_N \Leftrightarrow \underline{\mathbf{x}}_N = \underline{\mathbf{D}}^{-1} \underline{\mathbf{x}}_A$, por completo:

$$\underline{\mathbf{x}}_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underline{\mathbf{x}}_N \Leftrightarrow \underline{\mathbf{x}}_N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underline{\mathbf{x}}_A$$

(c) Em relação a base $(\underline{\mathbf{d}}_1, \underline{\mathbf{d}}_2, \underline{\mathbf{d}}_3, \underline{\mathbf{d}}_4)$:

$$\underline{\mathbf{d}}_5 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{d}}_1 + \underline{\mathbf{d}}_3$$

(d) As coordenadas antigas dos vetores básicos novos estão nas colunas da $\underline{\mathbf{D}}$:

$$\underline{\mathbf{d}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{\mathbf{d}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{\mathbf{d}}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{\mathbf{d}}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$



(e) As coordenadas novas dos vetores básicos antigos estão nas colunas da $\underline{\underline{D}}^{-1}$:

$$\underline{\underline{e}}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{e}}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{e}}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{e}}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. 2 pts. Uma aplicação linear, $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ é dado pela sua matriz:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Encontrar o núcleo e a sua dimensão.
- Encontrar a dimensão e uma base da imagem, $f(\mathbb{R}^3)$.
- Encontrar o conjunto: $\{\underline{\underline{x}} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\underline{\underline{x}}) = (0, 1, 1)\}$.
- f tem inversa?

Solution:

(a)

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{\underline{x}} = \underline{\underline{0}} \Leftrightarrow$$

$$x_2 + x_3 = 0 \wedge x_1 + x_3 = 0 \Leftrightarrow x_3 = t \wedge x_1 = x_2 = -t \Leftrightarrow \underline{\underline{x}} = t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

A dimensão do núcleo é $n - \rho_{\underline{\underline{A}}} = 3 - 2 = 1$.

- A dimensão da imagem é $\rho_{\underline{\underline{A}}} = 2$. Para encontrar uma base desta, selecionamos 2 vetores linearmente independentes das colunas do $\underline{\underline{A}}$, por exemplo: $\underline{\underline{a}}_1 = (0, 1, 1)$ e $\underline{\underline{a}}_2 = (1, -1, 0)$.
- Observamos que $f(\underline{\underline{i}}) = (0, 1, 1)$, ou seja: $\underline{\underline{x}} = \underline{\underline{i}}$ é uma solução *particular* do sistema homogênea $f(\underline{\underline{x}}) = (0, 1, 1)$. Obtemos a solução completa deste, adicionando a solução completa do sistema homogênea (o núcleo):

$$f(\underline{\underline{x}}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \underline{\underline{x}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

- Por $\rho_{\underline{\underline{A}}} = 2 < 3$, $\underline{\underline{A}}$ não é regular, assim f não tem inversa.

3. 4 pts. Dados os vetores em \mathbb{R}^4 :

$$\underline{\underline{v}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{v}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{v}}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{v}}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e uma aplicação linear, $f : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^4$:

$$f(\underline{\underline{v}}_1) = \underline{\underline{v}}_1 + \underline{\underline{v}}_2, \quad f(\underline{\underline{v}}_2) = -\underline{\underline{v}}_1 + \underline{\underline{v}}_2, \quad f(\underline{\underline{v}}_3) = \underline{\underline{v}}_3 + \underline{\underline{v}}_4, \quad f(\underline{\underline{v}}_4) = -\underline{\underline{v}}_3 + \underline{\underline{v}}_4$$

- Mostrar que os vetores $\underline{\underline{v}}_1, \underline{\underline{v}}_2, \underline{\underline{v}}_3, \underline{\underline{v}}_4$ formam uma base em \mathbb{R}^4 .
- Encontrar a matriz, $\underline{\underline{A}}$, em relação a base canônica (no domínio e na imagem).
- Encontrar a matriz, $\underline{\underline{B}}$, em relação da base $(\underline{\underline{v}}_1, \underline{\underline{v}}_2, \underline{\underline{v}}_3, \underline{\underline{v}}_4)$ (no domínio e na imagem).
- Sendo $U = \text{ger}(\underline{\underline{v}}_1, \underline{\underline{v}}_2)$, mostre que $f(U) = U$.



(e) Sendo $\underline{\underline{V}}$ a matriz contendo os vetores $\underline{\underline{v}}_1, \underline{\underline{v}}_2, \underline{\underline{v}}_3, \underline{\underline{v}}_4$ em colunas, mostre: $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{V}}^{-1} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{V}}$.

Solution:

(a) Mostramos que os vetores formam uma base e encontramos a inversa:

$$\begin{aligned} (\underline{\underline{V}} | \underline{\underline{I}}) &= \left(\begin{array}{cccc|cccc} \mathbf{1} & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -3 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \\ &\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & -1 & 4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 6 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \\ &\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 6 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 10 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -16 & -3 & 6 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 6 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 10 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 16 & 3 & -6 & -1 \end{array} \right) \sim \\ &\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 26 & 4 & -9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 16 & 3 & -6 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 26 & 4 & -9 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 16 & 3 & -6 & -1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Este cálculo mostra que o matriz $\underline{\underline{V}}$ é regular, ou seja que $\underline{\underline{v}}_1, \underline{\underline{v}}_2, \underline{\underline{v}}_3, \underline{\underline{v}}_4$ formam uma base em \mathbb{R}^4 .

(b) Encontramos as imagens:

$$\begin{aligned} f(\underline{\underline{v}}_1) &= \underline{\underline{v}}_1 + \underline{\underline{v}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} \\ f(\underline{\underline{v}}_2) &= -\underline{\underline{v}}_1 + \underline{\underline{v}}_2 = -\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ f(\underline{\underline{v}}_3) &= \underline{\underline{v}}_3 + \underline{\underline{v}}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} \\ f(\underline{\underline{v}}_4) &= -\underline{\underline{v}}_3 + \underline{\underline{v}}_4 = -\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Isto mostre, que: $\underline{\underline{A}} \underline{\underline{v}}_1 = (2, 2, 7, -4)^T$, $\underline{\underline{A}} \underline{\underline{v}}_2 = (0, -2, -1, 0)^T$, $\underline{\underline{A}} \underline{\underline{v}}_3 = (-2, 1, -6, 6)^T$, $\underline{\underline{A}} \underline{\underline{v}}_4 = (0, -1, 0, -4)^T$. De forma matricial:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{V}} &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \\ 7 & -1 & -6 & 0 \\ -4 & 0 & 6 & -4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \\ 7 & -1 & -6 & 0 \\ -4 & 0 & 6 & -4 \end{pmatrix} \underline{\underline{V}}^{-1} = \\ &\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \\ 7 & -1 & -6 & 0 \\ -4 & 0 & 6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 \\ 26 & 4 & -9 & -1 \\ 6 & 1 & -2 & 0 \\ 16 & 3 & -6 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & -2 & 6 & 0 \\ -68 & -10 & 24 & 3 \\ -83 & -10 & 28 & 1 \\ -16 & -6 & 8 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



(c) Procurando as imagens do $\underline{\mathbf{v}}_1, \dots, \underline{\mathbf{v}}_4$:

$$f(\underline{\mathbf{v}}_1) = (1, 1, 0, 0)^T$$

$$f(\underline{\mathbf{v}}_2) = (-1, 1, 0, 0)^T$$

$$f(\underline{\mathbf{v}}_3) = (0, 0, 1, 1)^T$$

$$f(\underline{\mathbf{v}}_4) = (0, 0, -1, 1)^T$$

Assim a matriz procurada é:

$$\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(d) Temos que: $\dim U = 2$, pois $\underline{\mathbf{v}}_1$ e $\underline{\mathbf{v}}_2$ são linearmente independentes. $f(\underline{\mathbf{v}}_1) = \underline{\mathbf{v}}_1 + \underline{\mathbf{v}}_2 \in U$, e $f(\underline{\mathbf{v}}_2) = -\underline{\mathbf{v}}_1 + \underline{\mathbf{v}}_2 \in U$, assim: $f(U) \subset U$. Porém as imagens $f(\underline{\mathbf{v}}_1), f(\underline{\mathbf{v}}_2)$ são linearmente independentes, assim: $\dim f(U) = 2 = U$. Juntando: $f(U) = U$

(e) Obtivemos em item (a) a matriz inversa. Calculamos:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{V}}}^{-1} \underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\underline{\mathbf{V}}} &= \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 \\ 26 & 4 & -9 & -1 \\ 6 & 1 & -2 & 0 \\ 16 & 3 & -6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -18 & -2 & 6 & 0 \\ -68 & -10 & 24 & 3 \\ -83 & -10 & 28 & 1 \\ -16 & -6 & 8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 \\ 26 & 4 & -9 & -1 \\ 6 & 1 & -2 & 0 \\ 16 & 3 & -6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \\ 7 & -1 & -6 & 0 \\ -4 & 0 & 6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\mathbf{B}}} \end{aligned}$$

QED²

²Quod Erat Demonstrandum: Seja provado!



Data: 19/05/2010
Semestre: 2010.1
Curso: Matemática
Disciplina: Álgebra Linear
Prova: II

1. 5 pts. Uma aplicação linear, $f : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^4$ é dado por sua matriz::

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Considerando os vetores:

$$\underline{\underline{\mathbf{v}}}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{\mathbf{v}}}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{\mathbf{v}}}_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{\mathbf{v}}}_4 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Mostre que os vetores $\underline{\underline{\mathbf{v}}}_1, \underline{\underline{\mathbf{v}}}_2, \underline{\underline{\mathbf{v}}}_3, \underline{\underline{\mathbf{v}}}_4$ formam uma base em \mathbb{R}^4 .
(b) Mostre que vale: $f(\underline{\underline{\mathbf{v}}}_i) = \lambda_i \underline{\underline{\mathbf{v}}}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$. Encontre os λ_i 's.
(c) Uma base, $\underline{\underline{\mathbf{v}}}_i$, é chamado ortonormal, se:

$$\underline{\underline{\mathbf{v}}}_i \cdot \underline{\underline{\mathbf{v}}}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

Mostre que os $\underline{\underline{\mathbf{v}}}_i$'s formam uma base ortonormal em \mathbb{R}^4 .

- (d) Organizando os vetores $\underline{\underline{\mathbf{v}}}_i$ como colunas numa matriz, $\underline{\underline{\mathbf{V}}}$, mostre: $\underline{\underline{\mathbf{V}}}^{-1} = \underline{\underline{\mathbf{V}}}^T$.
(e) Encontre uma relação entre coordenadas em relação a base canônica e coordenadas em relação a base $\underline{\underline{\mathbf{v}}}_i$.
(f) Mostre que $\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{V}}}^{-1} \underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\underline{\mathbf{V}}}$ é diagonal. Quais os valores na sua diagonal?

Solution:

(a)

$$\underline{\underline{\mathbf{V}}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Da redução segue, que $\rho_{\underline{\underline{\mathbf{V}}}} = 4$, ou seja os $\underline{\underline{\mathbf{v}}}_i$'s formam uma base.

(b)

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\underline{\mathbf{v}}}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \underline{\underline{\mathbf{v}}}_1 \Rightarrow \lambda_1 = 0$$

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\underline{\mathbf{v}}}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \underline{\underline{\mathbf{v}}}_2 \Rightarrow \lambda_2 = 2$$



$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\underline{\mathbf{v}}}_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = 4 \underline{\underline{\mathbf{v}}}_3 \Rightarrow \lambda_3 = 4$$

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\underline{\mathbf{v}}}_4 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \underline{\underline{\mathbf{v}}}_4 \Rightarrow \lambda_4 = 2$$

Comentário: Dizemos que os vetores $\underline{\underline{\mathbf{v}}}_i$ são *autovetores* da matriz $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ de *autovalor* λ_i .

(c) Verifica-se:

$$\underline{\underline{\mathbf{v}}}_1 \cdot \underline{\underline{\mathbf{v}}}_1 = \underline{\underline{\mathbf{v}}}_2 \cdot \underline{\underline{\mathbf{v}}}_2 = \underline{\underline{\mathbf{v}}}_3 \cdot \underline{\underline{\mathbf{v}}}_3 = \underline{\underline{\mathbf{v}}}_4 \cdot \underline{\underline{\mathbf{v}}}_4 = 1$$

E:

$$\underline{\underline{\mathbf{v}}}_1 \cdot \underline{\underline{\mathbf{v}}}_2 = \underline{\underline{\mathbf{v}}}_1 \cdot \underline{\underline{\mathbf{v}}}_3 = \underline{\underline{\mathbf{v}}}_1 \cdot \underline{\underline{\mathbf{v}}}_4 = \underline{\underline{\mathbf{v}}}_2 \cdot \underline{\underline{\mathbf{v}}}_3 = \underline{\underline{\mathbf{v}}}_2 \cdot \underline{\underline{\mathbf{v}}}_4 = \underline{\underline{\mathbf{v}}}_3 \cdot \underline{\underline{\mathbf{v}}}_4 = 0$$

Assim os $\underline{\underline{\mathbf{v}}}_i$'s formam uma base ortonormal em \mathbb{R}^4 .

(d) Por $\underline{\underline{\mathbf{V}}}$ ser regular, possui inversa - e a inversa é *única*. Formando a transposta:

$$\underline{\underline{\mathbf{V}}}^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplicando esta com $\underline{\underline{\mathbf{V}}}$:

$$\underline{\underline{\mathbf{V}}}^T \underline{\underline{\mathbf{V}}} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\mathbf{I}}} \Leftrightarrow \underline{\underline{\mathbf{V}}}^{-1} = \underline{\underline{\mathbf{V}}}^T$$

Concluimos que $\underline{\underline{\mathbf{V}}}^T$ é a inversa da $\underline{\underline{\mathbf{V}}}$.

(e)

$$\underline{\underline{\mathbf{x}}}_{antiga} = \underline{\underline{\mathbf{V}}} \underline{\underline{\mathbf{x}}}_{nova} \Leftrightarrow \underline{\underline{\mathbf{x}}}_{nova} = \underline{\underline{\mathbf{V}}}^T \underline{\underline{\mathbf{x}}}_{antiga}$$

(f) Usando os resultados em item b, temos:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\underline{\mathbf{v}}}_i = \lambda_i \underline{\underline{\mathbf{v}}}_i$$

Ou:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\underline{\mathbf{V}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}} (\underline{\underline{\mathbf{v}}}_1 \underline{\underline{\mathbf{v}}}_2 \underline{\underline{\mathbf{v}}}_3 \underline{\underline{\mathbf{v}}}_4) = (\lambda_1 \underline{\underline{\mathbf{v}}}_1 \lambda_2 \underline{\underline{\mathbf{v}}}_2 \lambda_3 \underline{\underline{\mathbf{v}}}_3 \lambda_4 \underline{\underline{\mathbf{v}}}_4)$$

Multiplicando com $\underline{\underline{\mathbf{V}}}^T$:

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{\mathbf{v}}}_1^T \\ \underline{\underline{\mathbf{v}}}_2^T \\ \underline{\underline{\mathbf{v}}}_3^T \\ \underline{\underline{\mathbf{v}}}_4^T \end{pmatrix} (\lambda_1 \underline{\underline{\mathbf{v}}}_1 \lambda_2 \underline{\underline{\mathbf{v}}}_2 \lambda_3 \underline{\underline{\mathbf{v}}}_3 \lambda_4 \underline{\underline{\mathbf{v}}}_4)$$

O elemento i, j desta matriz é: $\lambda_j \underline{\underline{\mathbf{v}}}_i^T \underline{\underline{\mathbf{v}}}_j = \lambda_j \underline{\underline{\mathbf{v}}}_i \cdot \underline{\underline{\mathbf{v}}}_j = \lambda_j \delta_{ij}$. Ou seja:

$$\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{V}}}^T \underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\underline{\mathbf{V}}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Mostrando que $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ é diagonal - com os valores 0, 2, 4, 2 na diagonal.



2. 3 pts. Uma aplicação linear, $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ é dado pela sua matriz:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Encontrar o núcleo, $\ker f$, e a sua dimensão. Mostrar que $\underline{\mathbf{d}}_1 = \frac{1}{3}(-2, 2, 1)^T \in \ker f$.
- (b) Encontrar a dimensão e uma base da imagem, $\text{Im}f$.
- (c) Mostrar que os vetores $\underline{\mathbf{d}}_2 = \frac{1}{3}(2, 1, 2)$ e $\underline{\mathbf{d}}_3 = \frac{1}{3}(1, 2, -2)$ formam uma base ortonormal da imagem.
- (d) Mostrar que: $\ker f \perp \text{Im}f$.

Solution:

(a)

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vemos que $\rho_A = 2$, assim: $\dim \ker f = 3 - 2 = 1$. Introduzindo parâmetro $x_3 = t$: $-x_1 = x_2 = 2t$. Isto é:

$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} t, \quad t \in \mathbb{R}$$

Observamos que o vetor $\underline{\mathbf{d}}_1 \in \ker f$ ($t = \frac{1}{3}$).

- (b) $\dim \text{Im}f = \rho_A = 2$, e mais: a imagem é gerado pelos vetores nas colunas de $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$. Os vetores nas primeiras duas colunas são linearmente independentes, assim podemos utilizar-os como uma base da imagem: $\underline{\mathbf{a}}_1 = (1, 0, 2)^T$ e $\underline{\mathbf{a}}_2 = (0, -1, 2)^T$; isto é: $\text{Im}f = \text{ger}(\underline{\mathbf{a}}_1, \underline{\mathbf{a}}_2)$.
 - (c) Primeiramente observamos que $\underline{\mathbf{d}}_2$ e $\underline{\mathbf{d}}_3$ são mutuamente ortogonais e normalizados. Mais: $3\underline{\mathbf{d}}_1 = \underline{\mathbf{a}}_2 + \underline{\mathbf{a}}_3 \in \text{Im}f$, e $3\underline{\mathbf{d}}_2 = \underline{\mathbf{a}}_1 + \underline{\mathbf{a}}_3 \in \text{Im}f$. Juntando: $\underline{\mathbf{d}}_2$ e $\underline{\mathbf{d}}_3$ formam uma base ortonormal de $\text{Im}f$.
 - (d) Observando que $\underline{\mathbf{d}}_2, \underline{\mathbf{d}}_3 \perp \underline{\mathbf{d}}_1$, concluímos: $\ker f \perp \text{Im}f$.
3. 2 pts. Consideramos a aplicação e os vetores introduzidos no questão 2.

- (a) Mostre que os vetores $\underline{\mathbf{d}}_1, \underline{\mathbf{d}}_2, \underline{\mathbf{d}}_3$ formam uma base ortonormal em \mathbb{R}^3 .
- (b) Encontrar as imagens: $f(\underline{\mathbf{d}}_i)$ em relação a base canônica.
- (c) Encontrar as imagens: $f(\underline{\mathbf{d}}_i)$ em relação a base $\underline{\mathbf{d}}_i$.
- (d) Encontrar a matriz do f usando a base $\underline{\mathbf{d}}_i$ no domínio e na imagem.

Solution:

(a) Verifica-se:

$$\underline{\mathbf{d}}_1 \cdot \underline{\mathbf{d}}_1 = \underline{\mathbf{d}}_2 \cdot \underline{\mathbf{d}}_2 = \underline{\mathbf{d}}_3 \cdot \underline{\mathbf{d}}_3 = 1$$

E:

$$\underline{\mathbf{d}}_1 \cdot \underline{\mathbf{d}}_2 = \underline{\mathbf{d}}_1 \cdot \underline{\mathbf{d}}_3 = \underline{\mathbf{d}}_2 \cdot \underline{\mathbf{d}}_3 = 0$$

Assim os $\underline{\mathbf{d}}_i$'s formam uma base ortonormal em \mathbb{R}^3 .

(b)

$$f(\underline{\mathbf{d}}_1) = \underline{\mathbf{0}},$$

pois $\underline{\mathbf{d}}_1 \in \ker f$.

$$f(\underline{\mathbf{d}}_2) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$



$$f(\underline{\mathbf{d}}_3) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(c) Observamos: $f(\underline{\mathbf{d}}_1) = \mathbf{0}$, $f(\underline{\mathbf{d}}_2) = 3\underline{\mathbf{d}}_2$ e $f(\underline{\mathbf{d}}_3) = -3\underline{\mathbf{d}}_3$.

(d) A matriz tem as *imagens dos vetores básicos em colunas*:

$$\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{V}}}^{-1} \underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\underline{\mathbf{V}}} = \underline{\underline{\mathbf{V}}}^T \underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\underline{\mathbf{V}}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Comentário: Os vetores $\underline{\mathbf{d}}_i$ são *autovetores* da matriz $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ com *autovalores* $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$ e $\lambda_3 = -3$.



Data: 01/06/2010
Semestre: 2010.1
Curso: Matemática
Disciplina: Álgebra Linear
Prova: II, 2ª chamada

1. 6 pts. Dado os vetores:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Mostre que os vetores (\mathbf{v}_i) formam uma base de \mathbb{R}^4 .
(b) Encontrar uma relação expressando as coordenadas em relação a base canônica, em termo das coordenadas em relação a base (\mathbf{v}_i) .
(c) Uma aplicação linear, $f : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^3$, é dado por:

$$f(\mathbf{v}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad f(\mathbf{v}_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad f(\mathbf{v}_3) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad f(\mathbf{v}_4) = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Encontrar o matriz, $\underline{\underline{A'}}$, da f usando base canônica em \mathbb{R}^3 e base (\mathbf{v}_i) em \mathbb{R}^4 .

- (d) Encontrar o matriz, $\underline{\underline{A}}$, da f usando base canônica em \mathbb{R}^4 e \mathbb{R}^3 .
(e) Encontrar a dimensão da imagem, $f(\mathbb{R}^4)$.
(f) Dado os vetores: $\mathbf{d}_1 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$ e $\mathbf{d}_2 = -\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_4$. Mostre que \mathbf{d}_1 e \mathbf{d}_2 gera o núcleo da f .
(g) Encontrar, em termos de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$, todas as vetores que satisfaz: $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{v}_1)$.

Solution:

(a)

$$\begin{aligned} (\underline{\underline{V}} | \underline{\underline{I}}) &= \left(\begin{array}{cccc|cccc} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array} \right) \sim \\ &\left(\begin{array}{cccc|cccc} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{array} \right) \sim \\ &\left(\begin{array}{cccc|cccc} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-\frac{1}{2}} & \mathbf{\frac{1}{2}} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{\frac{1}{2}} & \mathbf{-\frac{1}{2}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{-\frac{1}{2}} & \mathbf{\frac{1}{2}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-\frac{1}{2}} & \mathbf{\frac{1}{2}} \end{array} \right) \end{aligned}$$

O que mostre que os vetores \mathbf{v}_i formam uma base em \mathbb{R}^4 .

(b) Usando o cálculo no item anterior, temos:

$$\underline{\underline{x}}_{Antigo} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underline{\underline{x}}_{Novo} \Leftrightarrow \underline{\underline{x}}_{Novo} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \underline{\underline{x}}_{Antigo}$$



(c) Nas colunas da matriz, está as imagens dos vetores básicos:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}'}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

(d) Temos: $\underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\underline{\mathbf{V}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}'}} \Leftrightarrow \underline{\underline{\mathbf{A}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}'}} \underline{\underline{\mathbf{V}}}^{-1}$:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -1 & \frac{11}{2} & -\frac{3}{2} \\ 4 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & -2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(e)

$$\underline{\underline{\mathbf{A}'}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -5 \\ 0 & -4 & -4 & 8 \\ 0 & -5 & -5 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -5 \\ 0 & -4 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Assim: $\dim f(\mathbb{R}^4) = \rho_{\underline{\underline{\mathbf{A}'}}} = 2$.

(f) Primeiramente: $\dim \ker f = n - \rho = 4 - 2 = 2$. Observando que $\underline{\underline{\mathbf{d}}}_1 = [1, 1, -1, 0]_{\underline{\underline{\mathbf{v}}}}$ e $\underline{\underline{\mathbf{d}}}_2 = [-1, 2, 0, 1]_{\underline{\underline{\mathbf{v}}}}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ou seja: $\underline{\underline{\mathbf{d}}}_1, \underline{\underline{\mathbf{d}}}_2 \in \ker f$. Por $\underline{\underline{\mathbf{d}}}_1$ e $\underline{\underline{\mathbf{d}}}_2$ sendo linearmente independentes, concluímos que eles geram o núcleo da f .

(g) Claro, que $\underline{\underline{\mathbf{x}}} = \underline{\underline{\mathbf{v}}}_1$ é uma solução particular da equação: $f(\underline{\underline{\mathbf{x}}}) = f(\underline{\underline{\mathbf{v}}}_1)$. Assim a solução completa desta equação é: $\underline{\underline{\mathbf{x}}} = \underline{\underline{\mathbf{v}}}_1 + \ker f = (1 + t - s)\underline{\underline{\mathbf{v}}}_1 + (t + 2s)\underline{\underline{\mathbf{v}}}_2 - t\underline{\underline{\mathbf{v}}}_3 + s\underline{\underline{\mathbf{v}}}_4$, $t, s \in \mathbb{R}$.

2. 2 pts. Sendo $\underline{\underline{\mathbf{v}}}_1, \underline{\underline{\mathbf{v}}}_2$ uma base em \mathbb{C}^2 , uma aplicação linear, f , é dado por:

$$f(\underline{\underline{\mathbf{v}}}_1) = \underline{\underline{\mathbf{v}}}_1 + 2\underline{\underline{\mathbf{v}}}_2 \quad f(\underline{\underline{\mathbf{v}}}_2) = i\underline{\underline{\mathbf{v}}}_1 + \underline{\underline{\mathbf{v}}}_2$$

(a) Encontrar a matriz, $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, da f em relação a base $\underline{\underline{\mathbf{v}}}_1, \underline{\underline{\mathbf{v}}}_2$.

(b) Mostre que os vetores: $\underline{\underline{\mathbf{w}}}_1 = \underline{\underline{\mathbf{v}}}_1 + \underline{\underline{\mathbf{v}}}_2$ e $\underline{\underline{\mathbf{w}}}_2 = \underline{\underline{\mathbf{v}}}_1 - \underline{\underline{\mathbf{v}}}_2$ formam uma base de \mathbb{C}^2 .

(c) Encontrar a matriz, $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$, da f em relação a base $\underline{\underline{\mathbf{w}}}_1, \underline{\underline{\mathbf{w}}}_2$.

Solution:

2 pts. Sendo $\underline{\underline{\mathbf{v}}}_1, \underline{\underline{\mathbf{v}}}_2$ uma base em \mathbb{C}^2 , uma aplicação linear, f , é dado por:

$$f(\underline{\underline{\mathbf{v}}}_1) = \underline{\underline{\mathbf{v}}}_1 + 2\underline{\underline{\mathbf{v}}}_2 \quad f(\underline{\underline{\mathbf{v}}}_2) = i\underline{\underline{\mathbf{v}}}_1 + \underline{\underline{\mathbf{v}}}_2$$

(a) As imagens das vetores básicas são dadas, assim:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{aligned} (\underline{\underline{\mathbf{W}}}\underline{\underline{\mathbf{I}}}) &= \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \\ &\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right) = (\underline{\underline{\mathbf{I}}}\underline{\underline{\mathbf{W}}}^{-1}) \end{aligned}$$

(c) A matrix na base nova, é: $\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{W}}}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{A}}}\underline{\underline{\mathbf{W}}} =$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4+i & 2-i \\ i-2 & -i \end{pmatrix}$$



3. 2 pts. Dado a matriz:

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- (a) Encontrar as imagens dos vetores: $\underline{\mathbf{v}}_1 = (1, -1, 1)^T$ e $\underline{\mathbf{v}}_2 = (1, -2, 2)^T$.
(b) Encontrar um vetor, $\underline{\mathbf{v}}_3$, tal que: $f(\underline{\mathbf{v}}_3) = \underline{\mathbf{v}}_2 + \underline{\mathbf{v}}_3$.
(c) Encontrar a matriz da f em relação a base $\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2, \underline{\mathbf{v}}_3$.

Solution:

(a)

$$f(\underline{\mathbf{v}}_1) = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\underline{\mathbf{v}}_1$$

$$f(\underline{\mathbf{v}}_2) = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{v}}_2$$

(b) $f(\underline{\mathbf{v}}_3) = \underline{\mathbf{v}}_2 + \underline{\mathbf{v}}_3 \Leftrightarrow \underline{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{v}}_3 = \underline{\mathbf{v}}_2 + \underline{\mathbf{v}}_3 \Leftrightarrow (\underline{\mathbf{A}} - \underline{\mathbf{I}}) \underline{\mathbf{v}}_3 = \underline{\mathbf{v}}_2$. Resolvendo este sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & 2 & -2 \\ 4 & 0 & -2 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Usando z como parâmetro, $z = t$: $x = \frac{1}{2}(t+1)$ e $y = -t - 1$. Ou seja, a solução completa é:

$$\underline{\mathbf{v}}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

(c) Observando: $f(\underline{\mathbf{v}}_1) = 3\underline{\mathbf{v}}_1 = [3, 0, 0]_{\underline{\mathbf{v}}}$, $f(\underline{\mathbf{v}}_2) = \underline{\mathbf{v}}_2 = [0, 1, 0]_{\underline{\mathbf{v}}}$ e $f(\underline{\mathbf{v}}_3) = \underline{\mathbf{v}}_2 + \underline{\mathbf{v}}_3 = [0, 1, 1]_{\underline{\mathbf{v}}}$, obtemos a matriz da f colocando as imagens em colunas:

$$\underline{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Data: 24/06/2010
Semestre: 2010.1
Curso: Engenharia de Alimentos
Disciplina: Álgebra Linear
Prova: III

1. 3 pts. Dado a matriz:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

Onde $a \neq 0$.

- (a) Encontrar os autovalores da $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$.
- (b) Encontrar os autovetores da $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$.
- (c) A matriz $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ é similar com uma matriz diagonal? Caso sim, qual?
- (d) Os autovetores da $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ são ortogonais? Justifique!

Solution:

- (a) Ressaltamos que $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ é simétrica: $\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}^T$. Calculando:

$$P_2(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & a \\ a & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - a^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \pm a$$

- (b)

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} - (1 \pm a)\underline{\underline{\mathbf{I}}} = \begin{pmatrix} 1 - (1 \pm a) & a \\ a & 1 - (1 \pm a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mp a & a \\ a & \mp a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mp 1 & 1 \\ 1 & \mp 1 \end{pmatrix} \underline{\underline{\mathbf{x}}} = \underline{\underline{\mathbf{0}}} \Leftrightarrow$$

$$x_1 = \pm x_2 \Leftrightarrow x_2 = t \wedge x_1 = \pm t, \quad t \in \mathbb{R}$$

Juntando:

$$\lambda_1 = 1 + a : \underline{\underline{\mathbf{v}}}_1 = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = 1 - a : \underline{\underline{\mathbf{v}}}_2 = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Normalizando:

$$\lambda_1 = 1 + a : \underline{\underline{\mathbf{d}}}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = 1 - a : \underline{\underline{\mathbf{d}}}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- (c) Por $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ ser simétrica, ela é diagonalizável, ou seja similar de uma matriz diagonal, $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$. Usando a substituição ortogonal, $\underline{\underline{\mathbf{D}}}^{-1} = \underline{\underline{\mathbf{D}}}^T$:

$$\underline{\underline{\mathbf{D}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Temos:

$$\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{D}}}^T \underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\underline{\mathbf{D}}} = \begin{pmatrix} 1+a & 0 \\ 0 & 1-a \end{pmatrix}$$

- (d) De novo, pelo fator $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ ser simétrica, seus dois autovetores são ortogonais. Inspeccionando:

$$\underline{\underline{\mathbf{v}}}_1 \cdot \underline{\underline{\mathbf{v}}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

2. 4 pts. Uma aplicação linear, $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ é dado pela sua matriz:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -4 \\ -4 & 6 & -4 \\ -4 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$



- (a) Encontrar os autovalores e os autovetores da matriz $\underline{\underline{A}}$.
(b) Encontrar o núcleo da matriz $\underline{\underline{A}}$.
(c) Mostre que $\underline{\underline{A}}$ é diagonalizável.
(d) Encontre uma matriz diagonal, $\underline{\underline{B}}$, e uma matriz ortogonal, $\underline{\underline{D}}$, tal que $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{D}}^{-1} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{D}}$.

Solution:

Ressaltamos que a matriz é simétrica, e assim tem 3 raízes reais (contados com multiplicidade)

(a)

$$\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -4 & -4 \\ -4 & 6-\lambda & -4 \\ -4 & -4 & 6-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -2-\lambda & -2-\lambda \\ -4 & 6-\lambda & -4 \\ -4 & -4 & 6-\lambda \end{vmatrix} = -(2+\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -4 & 6-\lambda & -4 \\ -4 & -4 & 6-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$-(3+\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 10-\lambda & 0 \\ -4 & 0 & 10-\lambda \end{vmatrix} = -(2+\lambda)(10-\lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -2 \vee \lambda_2 = \lambda_3 = 10$$

$\lambda_2 = \lambda_3 = 10:$

$$\underline{\underline{A}} - 10\underline{\underline{I}} = \begin{pmatrix} -4 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{\underline{x}} = \underline{\underline{0}} \Leftrightarrow$$

$$x_1 = t \wedge x_2 = s \wedge x_3 = -t - s \Leftrightarrow \underline{\underline{x}} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t, s \in \mathbb{R}$$

$\lambda_1 = -2:$

O autovetor de $\lambda_1 = -2$ é ortogonal a ambos os autovetores de $\lambda_1 = 10$, ou seja paralela com o produto vetorial entre os dois:

$$\underline{\underline{x}} = \begin{vmatrix} \underline{\underline{i}} & \underline{\underline{j}} & \underline{\underline{k}} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

- (b) O núcleo é o auto-espaço de autovalor $\lambda = 0$. Por $\lambda = 0$ não ser autovalor: $\ker f = \{\underline{\underline{0}}\}$.
(c) Por $\underline{\underline{A}}$ ser simétrica ela é diagonalizável.
(d) Escolhemos como o primeiro vetor básico o autovetor de $\lambda = -2$, $\underline{\underline{v}}_1 = (1, 1, 1)$, e como o segundo vetor básico um dos autovetores de $\lambda = 10$, por exemplo: $\underline{\underline{v}}_2 = (1, 0, -1)$. Notamos que $\underline{\underline{v}}_1 \perp \underline{\underline{v}}_2$ (pois são autovetores de autovalores diferentes), porém $\underline{\underline{v}}_2$ não é ortogonal ao $(1, -1, 0)$. Escolhemos: $\underline{\underline{v}}_3 = (1, -2, 1)$, pois este é ortogonal em $\underline{\underline{v}}_1$ e $\underline{\underline{v}}_2$. Por $\underline{\underline{v}}_3$ ser ortogonal em $\underline{\underline{v}}_1$, concluímos que é autovetor do raiz dupla, $\lambda = 10$, o que também pode-se verificar diretamente. Normalizando obtemos uma base ortonormal:

$$\underline{\underline{d}}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{d}}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{d}}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Organizando estes vetores ortonormais em colunas, obtemos uma matriz ortogonal, $\underline{\underline{D}}^{-1} = \underline{\underline{D}}^T$:

$$\underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Sendo uma base de autovetores, a matriz do f neste base é diagonal:

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

E: $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{D}}^{-1} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{D}} = \underline{\underline{D}}^T \underline{\underline{A}} \underline{\underline{D}}$.



3. 3 pts. Dado a forma quadrática:

$$F(x, y, z) = 6x^2 + 6y^2 + 6z^2 - 8xy - 8xz - 8yz$$

- (a) Encontrar uma matriz *simétrica*, tal que: $F(x, y, z) = \underline{\mathbf{x}}^T \underline{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{x}}$.
- (b) Encontrar uma base ortonormal de autovetores da matriz $\underline{\mathbf{A}}$, e uma relação entre as coordenadas novas, (x', y', z') , e as coordenadas antigas, (x, y, z) .
- (c) Encontrar a matriz, $\underline{\mathbf{B}}$, neste base. Encontre também a forma quadrática transformada: $F'(x', y', z') = F(x, y, z)$.
- (d) Classifique a superfície definida por: $F(x, y, z) = 4$, fornecendo tipo, centro e semi-eixo(s).

Superfícies quadráticas em \mathbb{R}^3 :

I: Elipsóide, centro $C(x_0, y_0, z_0)$, semi-eixos a, b, c :

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$$

II: Hiperbolóide 1 folha, centro $C(x_0, y_0, z_0)$, semi-eixos a, b, c :

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$$

Eixo principal: $(x, y, z)^T = (x_0 + t, y_0 + t, z_0)^T$, $t \in \mathbb{R}$.

III: Hiperbolóide 2 folhas, centro $C(x_0, y_0, z_0)$, semi-eixos a, b, c :

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$$

Eixo principal: $(x, y, z)^T = (x_0 + t, y_0 + t, z_0)^T$, $t \in \mathbb{R}$.

IV: Cone quadrático, centro (x_0, y_0, z_0) , semi-eixos a, b, c :

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 0$$

V: Parabolóide elíptica, centro (x_0, y_0, z_0) , semi-eixos a, b :

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = z - z_0$$

VI: Parabolóide hiperbólica (sela), centro (x_0, y_0, z_0) , semi-eixos a, b :

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = z - z_0$$

Solution:

(a) Vemos:

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -4 \\ -4 & 6 & -4 \\ -4 & -4 & 6 \end{pmatrix},$$

e observamos que isto é a matriz $\underline{\mathbf{A}}$ do exercício anterior; utilizaremos os resultados ali obtidos.

(b) Usando os resultados do exercício anterior:

$$\underline{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$



A matriz $\underline{\underline{D}}$ transforma coordenadas novas em coordenadas antigas:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\underline{D}} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \frac{1}{\sqrt{3}} + y' \frac{1}{\sqrt{2}} + z' \frac{1}{\sqrt{6}} \\ x' \frac{1}{\sqrt{3}} - z' \frac{1}{\sqrt{6}} \\ x' \frac{1}{\sqrt{3}} - y' \frac{1}{\sqrt{2}} + z' \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underline{\underline{D}}^T \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \frac{1}{\sqrt{3}} + y \frac{1}{\sqrt{3}} + z \frac{1}{\sqrt{3}} \\ x \frac{1}{\sqrt{2}} - z \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x \frac{1}{\sqrt{6}} - y \frac{1}{\sqrt{6}} + z \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

(c) De novo, usando os resultados do exercício anterior:

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

E:

$$F'(x', y', z') = -2x'^2 + 10y'^2 + 10z'^2$$

(d) Em termos de x', y', z' a superfície: $F(x, y, z) = 4$, transforma em:

$$-2x'^2 + 10y'^2 + 10z'^2 = 4 \Leftrightarrow -\left(\frac{x'}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{y'}{\sqrt{\frac{2}{5}}}\right)^2 - \left(\frac{z'}{\sqrt{\frac{2}{5}}}\right)^2 = 1$$

No plano $y'z'$ ($x' = 0$), temos circunferências, nos planos $x'y'$ ($z' = 0$) respectivamente $x'z'$ ($y' = 0$), hipérbolos, e a superfície é uma hiperbolóide de uma folha (de revolução). O eixo de revolução é o eixo x' , paralelo com o vetor $\underline{\underline{v}}_1 = (1, 1, 1)$.



Data: 24/06/2010
Semestre: 2010.1
Curso: Matemática
Disciplina: Álgebra Linear
Prova: III

1. 3 pts. Dado a matriz:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

Onde $a \in \mathbb{R}$.

- (a) Encontrar os autovalores da $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.
- (b) Encontrar os autovetores da $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.
- (c) A matriz $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ é similar com uma matriz diagonal? Caso sim, qual?
- (d) Os autovetores da $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ são ortogonais? Justifique!

Solution:

- (a) Ressaltamos que $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ é simétrica: $\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}^T$. Calculando:

$$P_2(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & a \\ a & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - a^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \pm a$$

- (b)

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} - (1 \pm a)\underline{\underline{\mathbf{I}}} = \begin{pmatrix} 1 - (1 \pm a) & a \\ a & 1 - (1 \pm a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mp a & a \\ a & \mp a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mp 1 & 1 \\ 1 & \mp 1 \end{pmatrix} \underline{\underline{\mathbf{x}}} = \underline{\underline{\mathbf{0}}} \Leftrightarrow$$

$$x_1 = \pm x_2 \Leftrightarrow x_2 = t \wedge x_1 = \pm t, \quad t \in \mathbb{R}$$

Juntado:

$$\lambda_1 = 1 + a : \underline{\underline{\mathbf{v}}}_1 = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = 1 - a : \underline{\underline{\mathbf{v}}}_2 = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Normalizando:

$$\lambda_1 = 1 + a : \underline{\underline{\mathbf{d}}}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = 1 - a : \underline{\underline{\mathbf{d}}}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- (c) Por $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ ser simétrica, ela é diagonalizável, ou seja similar de uma matriz diagonal, $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$. Usando a substituição ortogonal, $\underline{\underline{\mathbf{D}}}^{-1} = \underline{\underline{\mathbf{D}}}^T$:

$$\underline{\underline{\mathbf{D}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Temos:

$$\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{D}}}^T \underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\underline{\mathbf{D}}} = \begin{pmatrix} 1+a & 0 \\ 0 & 1-a \end{pmatrix}$$

- (d) De novo, pelo fator $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ ser simétrica, seus dois autovetores são ortogonais. Inspeccionando:

$$\underline{\underline{\mathbf{v}}}_1 \cdot \underline{\underline{\mathbf{v}}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

2. 4 pts. Uma aplicação linear, $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ é dado pela sua matriz:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -4 \\ -4 & 3 & -4 \\ -4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$



- (a) Encontrar os autovalores e os autovetores da matriz $\underline{\underline{A}}$.
(b) Encontrar o núcleo da matriz $\underline{\underline{A}}$.
(c) Mostre que $\underline{\underline{A}}$ é diagonalizável.
(d) Encontre uma matriz diagonal, $\underline{\underline{B}}$, e uma matriz ortogonal, $\underline{\underline{D}}$, tal que $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{D}}^{-1} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{D}}$.

Solution:

Ressaltamos que a matrix é simétrica, e assim tem 3 raízes reais (contados com multiplicidade)

(a)

$$\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 & -4 \\ -4 & 3-\lambda & -4 \\ -4 & -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5-\lambda & -2-\lambda & -2-\lambda \\ -4 & 3-\lambda & -4 \\ -4 & -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -(5+\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -4 & 3-\lambda & -4 \\ -4 & -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$-(5+\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 7-\lambda & 0 \\ -4 & 0 & 7-\lambda \end{vmatrix} = -(5+\lambda)(7-\lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -5 \vee \lambda_2 = \lambda_3 = 7$$

$\lambda_2 = \lambda_3 = 7:$

$$\underline{\underline{A}} - 7\underline{\underline{I}} = \begin{pmatrix} -4 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{\underline{x}} = \underline{\underline{0}} \Leftrightarrow$$

$$x_1 = t \wedge x_2 = s \wedge x_3 = -t - s \Leftrightarrow \underline{\underline{x}} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t, s \in \mathbb{R}$$

$\lambda_1 = -5:$

O autovetor de $\lambda_1 = -5$ é ortogonal a ambos os autovetores de $\lambda_2 = 10$, ou seja paralela com o produto vetorial entre os dois:

$$\underline{\underline{x}} = \begin{vmatrix} \underline{\underline{i}} & \underline{\underline{j}} & \underline{\underline{k}} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

- (b) O núcleo é o auto-espaço de autovalor $\lambda = 0$. Por $\lambda = 0$ não ser autovalor: $\ker f = \{\underline{\underline{0}}\}$.
(c) Por $\underline{\underline{A}}$ ser simétrica ela é diagonalizável.
(d) Escolhemos como o primeiro vetor básico o autovetor de $\lambda = -5$, $\underline{\underline{v}}_1 = (1, 1, 1)$, e como o segundo vetor básico um dos autovetores de $\lambda = 7$, por exemplo: $\underline{\underline{v}}_2 = (1, 0, -1)$. Notamos que $\underline{\underline{v}}_1 \perp \underline{\underline{v}}_2$ (pois são autovetores de autovalores diferentes), porém $\underline{\underline{v}}_2$ não é ortogonal ao $(1, -1, 0)$. Escolhemos: $\underline{\underline{v}}_3 = (1, -2, 1)$, pois este é ortogonal em $\underline{\underline{v}}_1$ e $\underline{\underline{v}}_2$. Por $\underline{\underline{v}}_3$ ser ortogonal em $\underline{\underline{v}}_1$, concluímos que é autovetor do raiz dupla, $\lambda = 7$, o que também pode-se verificar diretamente. Normalizando obtemos uma base ortonormal:

$$\underline{\underline{d}}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{d}}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{d}}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Organizando estes vetores ortonormais em colunas, obtemos uma matriz ortogonal, $\underline{\underline{D}}^{-1} = \underline{\underline{D}}^T$:

$$\underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Sendo uma base de autovetores, a matriz do f neste base é diagonal:

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

E: $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{D}}^{-1} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{D}} = \underline{\underline{D}}^T \underline{\underline{A}} \underline{\underline{D}}$.



3. 3 pts. Dado a forma quadrática:

$$F(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 8xy - 8xz - 8yz$$

- (a) Encontrar uma matriz *simétrica*, tal que: $F(x, y, z) = \underline{\mathbf{x}}^T \underline{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{x}}$.
- (b) Encontrar uma base ortonormal de autovetores da matriz $\underline{\mathbf{A}}$, e uma relação entre as coordenadas novas, (x', y', z') , e as coordenadas antigas, (x, y, z) .
- (c) Encontrar a matriz, $\underline{\mathbf{B}}$, neste base. Encontre também a forma quadrática transformada: $F'(x', y', z') = F(x, y, z)$.
- (d) Classifique a superfície definida por: $F(x, y, z) = 4$, fornecendo tipo, centro e semi-eixo(s).

Superfícies quadráticas em \mathbb{R}^3 :

I: Elipsóide, centro $C(x_0, y_0, z_0)$, semi-eixos a, b, c :

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$$

II: Hiperbolóide 1 folha, centro $C(x_0, y_0, z_0)$, semi-eixos a, b, c :

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$$

Eixo principal: $(x, y, z)^T = (x_0 + t, y_0 + t, z_0)^T$, $t \in \mathbb{R}$.

III: Hiperbolóide 2 folhas, centro $C(x_0, y_0, z_0)$, semi-eixos a, b, c :

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$$

Eixo principal: $(x, y, z)^T = (x_0 + t, y_0 + t, z_0)^T$, $t \in \mathbb{R}$.

IV: Cone quadrático, centro (x_0, y_0, z_0) , semi-eixos a, b, c :

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 0$$

V: Parabolóide elíptica, centro (x_0, y_0, z_0) , semi-eixos a, b :

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = z - z_0$$

VI: Parabolóide hiperbólica (sela), centro (x_0, y_0, z_0) , semi-eixos a, b :

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = z - z_0$$

Solution:

(a) Vemos:

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -4 \\ -4 & 3 & -4 \\ -4 & -4 & 3 \end{pmatrix},$$

e observamos que isto é a matriz $\underline{\mathbf{A}}$ do exercício anterior; utilizaremos os resultados ali obtidos.

(b) Usando os resultados do exercício anterior:

$$\underline{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$



A matriz $\underline{\underline{D}}$ transforma coordenadas novas em coordenadas antigas:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\underline{D}} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \frac{1}{\sqrt{3}} + y' \frac{1}{\sqrt{2}} + z' \frac{1}{\sqrt{6}} \\ x' \frac{1}{\sqrt{3}} - 2z' \frac{1}{\sqrt{6}} \\ x' \frac{1}{\sqrt{3}} - y' \frac{1}{\sqrt{2}} + z' \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underline{\underline{D}}^T \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \frac{1}{\sqrt{3}} + y \frac{1}{\sqrt{3}} + z \frac{1}{\sqrt{3}} \\ x \frac{1}{\sqrt{2}} - z \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x \frac{1}{\sqrt{6}} - y \frac{2}{\sqrt{6}} + z \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

(c) De novo, usando os resultados do exercício anterior:

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

E:

$$F'(x', y', z') = -5x'^2 + 7y'^2 + 7z'^2$$

(d) Em termos de x', y', z' a superfície: $F(x, y, z) = 4$, transforma em:

$$-5x'^2 + 7y'^2 + 7z'^2 = 4 \Leftrightarrow -\left(\frac{x'}{\sqrt{\frac{4}{5}}}\right)^2 + \left(\frac{y'}{\sqrt{\frac{4}{7}}}\right)^2 + \left(\frac{z'}{\sqrt{\frac{4}{7}}}\right)^2 = 1$$

No plano $y'z'$ ($x' = 0$), temos circunferências, nos planos $x'y'$ ($z' = 0$) respectivamente $x'z'$ ($y' = 0$), hipérbolas, e a superfície é uma hiperboloide de uma folha (de revolução). Semieixos: $\sqrt{\frac{4}{5}}$, $\sqrt{\frac{4}{7}}$ e $\sqrt{\frac{4}{7}}$. O eixo de revolução é o eixo x' , paralelo com o vetor $\underline{v}_1 = (1, 1, 1)$.



Data: 29/06/2010
Semestre: 2010.1
Curso: Engenharia de Alimentos
Disciplina: Álgebra Linear
Prova: IV (Substituitiva)

1. 3 pts. Dado a matriz:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

- (a) Encontrar os autovalores e os autovetores da $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ por qualquer valor do constante $a \in \mathbb{R}$.
(b) Os autovetores da $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ são ortogonais? Justifique!
(c) Por quais valores do $a \in \mathbb{R}$ $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ é diagonalizável? Por estes valores, encontrar uma matriz regular, $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$, e uma matriz diagonal, $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$, tal que $\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{D}}}^{-1} \underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\underline{\mathbf{D}}}$.

Solution:

(a)

$$\det(\underline{\underline{\mathbf{A}}} - \lambda \underline{\underline{\mathbf{I}}}) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 0 & a - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(a - \lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \vee \lambda = a$$

$\underline{\underline{\lambda}}_1 = 1$:

$$\det(\underline{\underline{\mathbf{A}}} - \underline{\underline{\mathbf{I}}}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & a - 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{\underline{\mathbf{x}}} = \underline{\underline{\mathbf{0}}} \Leftrightarrow \underline{\underline{\mathbf{x}}} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{v}}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\underline{\underline{\lambda}}_2 = a$:

$$\det(\underline{\underline{\mathbf{A}}} - a \underline{\underline{\mathbf{I}}}) = \begin{pmatrix} 1 - a & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{\underline{\mathbf{x}}} = \underline{\underline{\mathbf{0}}} \Leftrightarrow \underline{\underline{\mathbf{x}}} = t \begin{pmatrix} 2 \\ a - 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{v}}}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ a - 1 \end{pmatrix}$$

- (b) Vemos: $\underline{\underline{\mathbf{v}}}_1 \cdot \underline{\underline{\mathbf{v}}}_2 = 2 \neq 0$, assim os autovetores *não* são ortogonais. Ressaltamos, que por matrizes simétricas temos que autovetores de autovalores diferentes são ortogonais, sem a condição da simetria, a teoria apenas garante que os autovetores são linearmente independentes.
(c) Por $a \neq 1$ os autovalores são distintos, e os autovetores linearmente independentes. Por $a = 1$, temos uma raiz dupla, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, porém somente um autovetor, pois $\underline{\underline{\mathbf{v}}}_1$ e $\underline{\underline{\mathbf{v}}}_2$ são linearmente dependentes.
Então, $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ é diagonalizável, se e somente se: $a \neq 1$, e:

$$\underline{\underline{\mathbf{D}}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & a - 1 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{\mathbf{B}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

E:

$$\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{D}}}^{-1} \underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\underline{\mathbf{D}}}$$

2. 4 pts. Uma aplicação linear, $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ é dado pela sua matriz:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- (a) Encontrar os autovalores e os autovetores da matriz $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$.
(b) Encontrar o núcleo da matriz $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$.



(c) Mostre que $\underline{\underline{A}}$ é diagonalizável.

(d) Encontre uma matriz diagonal, $\underline{\underline{B}}$, e uma matriz ortogonal, $\underline{\underline{D}}$, tal que $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{D}}^{-1} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{D}}$.

Solution:

Ressaltamos que a matriz é simétrica, e assim tem 3 raízes reais (contadas com multiplicidade)

(a)

$$\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda+2)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -2 \vee \lambda_3 = 1$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = -2:$

$$\underline{\underline{A}} + 2\underline{\underline{I}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{\underline{x}} = \underline{\underline{0}} \Leftrightarrow$$

$$x_1 = t \wedge x_2 = s \wedge x_3 = -t - s \Leftrightarrow \underline{\underline{x}} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t, s \in \mathbb{R}$$

$\lambda_3 = 1:$

O autovetor de $\lambda_1 = 1$ é ortogonal a ambos os autovetores de $\lambda_1 = -2$, ou seja paralela com o produto vetorial entre os dois:

$$\underline{\underline{x}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

(b) O núcleo é o auto-espço de autovalor $\lambda = 0$. Por $\lambda = 0$ não ser autovalor: $\ker f = \{\underline{\underline{0}}\}$.

(c) Por $\underline{\underline{A}}$ ser simétrica ela é diagonalizável.

(d) Escolhemos como o primeiro vetor básico o autovetor de $\lambda = 1$, $\underline{\underline{v}}_1 = (1, 1, 1)$, e como o segundo vetor básico um dos autovetores de $\lambda = -2$, por exemplo: $\underline{\underline{v}}_2 = (1, 0, -1)$. Notamos que $\underline{\underline{v}}_1 \perp \underline{\underline{v}}_2$ (pois são autovetores de autovalores diferentes), porém $\underline{\underline{v}}_2$ não é ortogonal ao $(1, -1, 0)$. Escolhemos: $\underline{\underline{v}}_3 = (1, -2, 1)$, pois este é ortogonal em $\underline{\underline{v}}_1$ e $\underline{\underline{v}}_2$. Por $\underline{\underline{v}}_3$ ser ortogonal em $\underline{\underline{v}}_1$, concluímos que é autovetor da raiz dupla, $\lambda = -2$, o que também pode-se verificar diretamente. Normalizando obtemos uma base ortonormal:

$$\underline{\underline{d}}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{d}}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{d}}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Organizando estes vetores ortonormais em colunas, obtemos uma matriz ortogonal, $\underline{\underline{D}}^{-1} = \underline{\underline{D}}^T$:

$$\underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Sendo uma base de autovetores, a matriz do f neste base é diagonal:

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

E: $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{D}}^{-1} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{D}} = \underline{\underline{D}}^T \underline{\underline{A}} \underline{\underline{D}}$.



3. 3 pts. Dado a forma quadrática:

$$F(x, y, z) = -x^2 - y^2 - z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$$

- (a) Encontrar uma matriz *simétrica*, tal que: $F(x, y, z) = \underline{\mathbf{x}}^T \underline{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{x}}$.
- (b) Encontrar uma base ortonormal de autovetores da matriz $\underline{\mathbf{A}}$, e uma relação entre as coordenadas novas, (x', y', z') , e as coordenadas antigas, (x, y, z) .
- (c) Encontrar a matriz, $\underline{\mathbf{B}}$, neste base. Encontre também a forma quadrática transformada: $F'(x', y', z') = F(x, y, z)$.
- (d) Classifique a superfície definida por: $F(x, y, z) = 2$, encontrando tipo, centro e semi-eixo(s) na base canônica.

Superfícies quadráticas em \mathbb{R}^3 :

I: Elipsóide, centro $C(x_0, y_0, z_0)$, semi-eixos a, b, c :

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$$

II: Hiperbolóide 1 folha, centro $C(x_0, y_0, z_0)$, semi-eixos a, b, c :

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$$

Eixo principal: $(x, y, z)^T = (x_0 + t, y_0 + t, z_0)^T$, $t \in \mathbb{R}$.

III: Hiperbolóide 2 folhas, centro $C(x_0, y_0, z_0)$, semi-eixos a, b, c :

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$$

Eixo principal: $(x, y, z)^T = (x_0 + t, y_0 + t, z_0)^T$, $t \in \mathbb{R}$.

IV: Cone quadrático, centro (x_0, y_0, z_0) , semi-eixos a, b, c :

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 0$$

V: Parabolóide elíptica, centro (x_0, y_0, z_0) , semi-eixos a, b :

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = z - z_0$$

VI: Parabolóide hiperbólica (sela), centro (x_0, y_0, z_0) , semi-eixos a, b :

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = z - z_0$$

Solution:

(a) Vemos:

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

e observamos que isto é a matriz $\underline{\mathbf{A}}$ do exercício anterior; utilizaremos os resultados ali obtidos.

(b) Usando os resultados do exercício anterior:

$$\underline{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$



A matriz $\underline{\underline{D}}$ transforma coordenadas novas em coordenadas antigas:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\underline{D}} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \frac{1}{\sqrt{3}} + y' \frac{1}{\sqrt{2}} + z' \frac{1}{\sqrt{6}} \\ x' \frac{1}{\sqrt{3}} - 2z' \frac{1}{\sqrt{6}} \\ x' \frac{1}{\sqrt{3}} - y' \frac{1}{\sqrt{2}} + z' \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underline{\underline{D}}^T \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \frac{1}{\sqrt{3}} + y \frac{1}{\sqrt{3}} + z \frac{1}{\sqrt{3}} \\ x \frac{1}{\sqrt{2}} - z \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x \frac{1}{\sqrt{6}} - 2y \frac{1}{\sqrt{6}} + z \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

(c) De novo, usando os resultados do exercício anterior:

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

E:

$$F'(x', y', z') = x'^2 - 2y'^2 - 2z'^2$$

(d) Em termos de x', y', z' a superfície: $F(x, y, z) = 2$, transforma em:

$$x'^2 - 2y'^2 - 2z'^2 = 2 \Leftrightarrow \left(\frac{x'}{\sqrt{2}}\right)^2 - (y')^2 - (z')^2 = 1$$

Em planos paralelos com o plano $y'z'$ ($x' = \alpha$), somente temos quanto: $\alpha^2 > 2$, neste casos temos circunferências. Nos planos $x'y'$ ($z' = \kappa$) respectivamente $x'z'$ ($y' = \beta$), hipérbolas, e a superfície é uma hiperboloide de duas folhas (de revolução). O eixo de revolução é o eixo x' , paralelo com o vetor $(x, y, z)^T = \underline{v}_1 = (1, 1, 1)^T$.



Data: 29/06/2010
Semestre: 2010.1
Curso: Matemática
Disciplina: Álgebra Linear
Prova: IV (Substituitiva)

1. 3 pts. Dado a matriz:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} a & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- (a) Encontrar os autovalores e os autovetores da $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ por qualquer valor do constante $a \in \mathbb{R}$.
(b) Os autovetores da $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ são ortogonais? Justifique!
(c) Por quais valores do $a \in \mathbb{R}$ $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ é diagonalizável? Por estes valores, encontrar uma matriz regular, $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$, e uma matriz diagonal, $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$, tal que $\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{D}}}^{-1} \underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\underline{\mathbf{D}}}$.

Solution:

(a)

$$\det(\underline{\underline{\mathbf{A}}} - \lambda \underline{\underline{\mathbf{I}}}) = \begin{vmatrix} a - \lambda & 3 \\ 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda)(2 - \lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = a \vee \lambda = 2$$

$\underline{\underline{\lambda}}_1 = 2$:

$$\det(\underline{\underline{\mathbf{A}}} - \underline{\underline{\lambda}}_1 \underline{\underline{\mathbf{I}}}) = \begin{pmatrix} a - 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{\underline{\mathbf{x}}} = \underline{\underline{\mathbf{0}}} \Leftrightarrow \underline{\underline{\mathbf{x}}} = t \begin{pmatrix} 3 \\ a - 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{v}}}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ a - 2 \end{pmatrix}$$

$\underline{\underline{\lambda}}_2 = a$:

$$\det(\underline{\underline{\mathbf{A}}} - \underline{\underline{\lambda}}_2 \underline{\underline{\mathbf{I}}}) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 2 - a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{\underline{\mathbf{x}}} = \underline{\underline{\mathbf{0}}} \Leftrightarrow \underline{\underline{\mathbf{x}}} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{v}}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (b) Vemos: $\underline{\underline{\mathbf{v}}}_1 \cdot \underline{\underline{\mathbf{v}}}_2 = 3 \neq 0$, assim os autovetores *não* são ortogonais. Ressaltamos, que por matrizes simétricas temos que autovetores de autovalores diferentes são ortogonais, sem a condição da simetria, a teoria apenas garante que os autovetores são linearmente independentes.
(c) Por $a \neq 2$ os autovalores são distintos, e os autovetores linearmente independentes. Por $a = 2$, temos uma raiz dupla, $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, porém somente um autovetor, pois $\underline{\underline{\mathbf{v}}}_1$ e $\underline{\underline{\mathbf{v}}}_2$ são linearmente dependentes.
Então, $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ é diagonalizável, se e somente se: $a \neq 2$, e:

$$\underline{\underline{\mathbf{D}}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ a - 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{\mathbf{B}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

E:

$$\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{D}}}^{-1} \underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\underline{\mathbf{D}}}$$

2. 4 pts. Uma aplicação linear, $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ é dado pela sua matriz:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

- (a) Encontrar os autovalores e os autovetores da matriz $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$.
(b) Encontrar o núcleo da matriz $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$.



(c) Mostre que $\underline{\underline{A}}$ é diagonalizável.

(d) Encontre uma matriz diagonal, $\underline{\underline{B}}$, e uma matriz ortogonal, $\underline{\underline{D}}$, tal que $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{D}}^{-1} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{D}}$.

Solution:

Ressaltamos que a matriz é simétrica, e assim tem 3 raízes reais (contadas com multiplicidade)

(a)

$$\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & -\lambda & -\lambda \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$-\lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda+3)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -3 \vee \lambda_3 = 0$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = -3:$

$$\underline{\underline{A}} - 10\underline{\underline{I}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{\underline{x}} = \underline{\underline{0}} \Leftrightarrow$$

$$x_1 = t \wedge x_2 = s \wedge x_3 = -t - s \Leftrightarrow \underline{\underline{x}} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t, s \in \mathbb{R}$$

$\lambda_3 = 0:$

O autovetor de $\lambda_1 = 0$ é ortogonal a ambos os autovetores de $\lambda_1 = -3$, ou seja paralela com o produto vetorial entre os dois:

$$\underline{\underline{x}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

(b) O núcleo é o auto-espaco de autovalor $\lambda = 0$, assim: $\ker f = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$.

(c) Por $\underline{\underline{A}}$ ser simétrica ela é diagonalizável.

(d) Escolhemos como o primeiro vetor básico o autovetor de $\lambda = 0$, $\underline{\underline{v}}_1 = (1, 1, 1)$, e como o segundo vetor básico um dos autovetores de $\lambda = -3$, por exemplo: $\underline{\underline{v}}_2 = (1, 0, -1)$. Notamos que $\underline{\underline{v}}_1 \perp \underline{\underline{v}}_2$ (pois são autovetores de autovalores diferentes), porém $\underline{\underline{v}}_2$ não é ortogonal ao $(1, -1, 0)$. Escolhemos: $\underline{\underline{v}}_3 = (1, -2, 1)$, pois este é ortogonal em $\underline{\underline{v}}_1$ e $\underline{\underline{v}}_2$. Por $\underline{\underline{v}}_3$ ser ortogonal em $\underline{\underline{v}}_1$, concluímos que é autovetor da raiz dupla, $\lambda = -3$, o que também pode-se verificar diretamente. Normalizando obtemos uma base ortonormal:

$$\underline{\underline{d}}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{d}}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{d}}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Organizando estes vetores ortonormais em colunas, obtemos uma matriz ortogonal, $\underline{\underline{D}}^{-1} = \underline{\underline{D}}^T$:

$$\underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Sendo uma base de autovetores, a matriz do f neste base é diagonal:

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

E: $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{D}}^{-1} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{D}} = \underline{\underline{D}}^T \underline{\underline{A}} \underline{\underline{D}}$.



3. 3 pts. Dado a forma quadrática:

$$F(x, y, z) = -2x^2 - 2y^2 - 2z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$$

- Encontrar uma matriz *simétrica*, tal que: $F(x, y, z) = \underline{\mathbf{x}}^T \underline{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{x}}$.
- Encontrar uma base ortonormal de autovetores da matriz $\underline{\mathbf{A}}$, e uma relação entre as coordenadas novas, (x', y', z') , e as coordenadas antigas, (x, y, z) .
- Encontrar a matriz, $\underline{\mathbf{B}}$, neste base. Encontre também a forma quadrática transformada: $F'(x', y', z') = F(x, y, z)$.
- Classifique a superfície definida por: $F(x, y, z) = -3$, encontrando tipo, centro (se tiver) e semi-eixo(s) na base canônica.

Superfícies quadráticas em \mathbb{R}^3 :

I: Elipsóide, centro $C(x_0, y_0, z_0)$, semi-eixos a, b, c :

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$$

II: Hiperbolóide 1 folha, centro $C(x_0, y_0, z_0)$, semi-eixos a, b, c :

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$$

Eixo principal: $(x, y, z)^T = (x_0 + t, y_0 + t, z_0)^T$, $t \in \mathbb{R}$.

III: Hiperbolóide 2 folhas, centro $C(x_0, y_0, z_0)$, semi-eixos a, b, c :

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$$

Eixo principal: $(x, y, z)^T = (x_0 + t, y_0 + t, z_0)^T$, $t \in \mathbb{R}$.

IV: Cone quadrático, centro (x_0, y_0, z_0) , semi-eixos a, b, c :

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 0$$

V: Parabolóide elíptica, centro (x_0, y_0, z_0) , semi-eixos a, b :

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = z - z_0$$

VI: Parabolóide hiperbólica (sela), centro (x_0, y_0, z_0) , semi-eixos a, b :

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = z - z_0$$

Solution:

(a) Vemos:

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

e observamos que isto é a matriz $\underline{\mathbf{A}}$ do exercício anterior; utilizaremos os resultados ali obtidos.

(b) Usando os resultados do exercício anterior:

$$\underline{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$



A matriz $\underline{\underline{D}}$ transforma coordenadas novas em coordenadas antigas:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\underline{D}} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \frac{1}{\sqrt{3}} + y' \frac{1}{\sqrt{2}} + z' \frac{1}{\sqrt{6}} \\ x' \frac{1}{\sqrt{3}} - 2z' \frac{1}{\sqrt{6}} \\ x' \frac{1}{\sqrt{3}} - y' \frac{1}{\sqrt{2}} + z' \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underline{\underline{D}}^T \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \frac{1}{\sqrt{3}} + y \frac{1}{\sqrt{3}} + z \frac{1}{\sqrt{3}} \\ x \frac{1}{\sqrt{2}} - z \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x \frac{1}{\sqrt{6}} - 2y \frac{1}{\sqrt{6}} + z \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

(c) De novo, usando os resultados do exercício anterior:

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

E:

$$F'(x', y', z') = -3y'^2 - 3z'^2$$

(d) Em termos de x', y', z' a superfície: $F(x, y, z) = -3$, transforma em:

$$-3y'^2 - 3z'^2 = -3 \Leftrightarrow y'^2 + z'^2 = 1$$

Isto é um cilindro, com geradores paralelos ao eixo x' , ou seja: $(x, y, z)^T = (1, 1, 1)^T$, e centros neste. Os semi-eixos das circunferências, são: $a = b = 1$.



OBS! Respondendo a prova à lapis, perde-se o direito de revisão da prova. **OBS!**