Dr. Ole Peter Smith

Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal de Goiás
ole@mat.ufg.br - http://www.ime.ufg.br/docentes/olepeter

Data:	15/04/2009
Semestre:	
Curso:	Engenharia de Computação
Disciplina:	Álgebra Linear
Prova:	I

1. *4 pts.* Dado as matrizes:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

   (a) Encontrar: $\det \underline{\underline{A}}$ e $\det \underline{\underline{B}}$.

   (b) Encontrar as matrizes adjuntas: $\underline{\underline{A}}^*$ e $\underline{\underline{B}}^*$.

   (c) Encontrar os inversos: $\underline{\underline{A}}^{-1}$ e $\underline{\underline{B}}^{-1}$.

   (d) Encontrar os determinantes dos inversos: $\det(\underline{\underline{A}}^{-1})$ e $\det(\underline{\underline{B}}^{-1})$.

   (e) Encontrar os produtos: $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}$ e $\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}$.

   (f) Mostre que em geral vale por matrizes do mesmo ordem: $(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})^{-1} = \underline{\underline{B}}^{-1}\underline{\underline{A}}^{-1}$.

   (g) Encontrar o inverso do produto: $(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})^{-1}$.

   (h) Encontrar o inverso do produto: $(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}})^{-1}$.

2. *4 pts.* Dado a sistema linear:

$$(*) : \left\{ \begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & + & 5x_5 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 5x_4 & - & x_5 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & + & 6x_4 & - & 3x_5 & = & 3 \end{array} \right\}$$

   (a) Encontrar a solução completa do sistema homogêneo do $(*)$.

   (b) Encontrar a solução completa do sistema não homogêneo.

   (c) Encontrar a solução completa do sistema:

$$(**) : \left\{ \begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & + & 5x_5 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 5x_4 & - & x_5 & = & 3 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & + & 6x_4 & - & 3x_5 & = & 4 \end{array} \right\}$$

3. *2 pts.* (Cabeludo) Dado as matrizes:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ a & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & b \end{pmatrix}, \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2$$

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ a & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 0 & a \\ 0 & 0 & a & 0 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}$$

   (a) Encontrar para quaisquer valores de a e b o determinante do $\underline{\underline{A}}$.

   (b) Encontrar para quaisquer valores de a e b o posto do $\underline{\underline{A}}$.

   (c) Encontrar para qualquer valor de a o determinante do $\underline{\underline{B}}$.

   (d) Para quais valores de a o matriz $\underline{\underline{B}}$ tem inverso? Para estes valores, encontrar o inverso.

Dr. Ole Peter Smith
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal de Goiás
ole@mat.ufg.br - http://www.ime.ufg.br/docentes/olepeter

Data:	05/05/2009
Semestre:	
Curso:	Engenharia Civil
Disciplina:	Álgebra Linear
Prova:	I

1. *4 pts.* Dado as matrizes:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Sabendo que:

$$\det\left(\underline{\underline{A}}^{-1}\right) = \det \underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{\det \underline{\underline{A}}}$$

e:

$$\left(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}\right)^{-1} = \underline{\underline{B}}^{-1}\underline{\underline{A}}^{-1}$$

responde o seguinte:

(a) Encontrar: $\det \underline{\underline{A}}$ e $\det \underline{\underline{B}}$.

(b) Encontrar as matrizes adjuntas: $\underline{\underline{A}}^*$ e $\underline{\underline{B}}^*$.

(c) Encontrar os inversos: $\underline{\underline{A}}^{-1}$ e $\underline{\underline{B}}^{-1}$.

(d) Encontrar os determinantes dos inversos: $\det\left(\underline{\underline{A}}^{-1}\right)$ e $\det\left(\underline{\underline{B}}^{-1}\right)$.

(e) Encontrar os produtos: $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}$ e $\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}$.

(f) Encontrar o inverso do produto: $\left(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}\right)^{-1}$.

2. *4 pts.* Dado a sistema linear:

$$(*) : \left\{ \begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & + & 5x_5 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 5x_4 & - & x_5 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & + & 6x_4 & - & 3x_5 & = & 3 \end{array} \right\}$$

(a) Encontrar a solução completa do sistema homogêneo do $(*)$.

(b) Encontrar a solução completa do sistema não homogêneo.

(c) Encontrar a solução completa do sistema:

$$(**) : \left\{ \begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & + & 5x_5 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 5x_4 & - & x_5 & = & 3 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & + & 6x_4 & - & 3x_5 & = & 4 \end{array} \right\}$$

3. *2 pts.* (Cabeludo) Dado as matrizes:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ a & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & b \end{pmatrix}, \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2$$

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ a & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 0 & a \\ 0 & 0 & a & 0 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}$$

(a) Encontrar para quaisquer valores de a e b o determinante do $\underline{\underline{A}}$.

(b) Encontrar para quaisquer valores de a e b o posto do $\underline{\underline{A}}$.

(c) Encontrar para qualquer valor de a o determinante do $\underline{\underline{B}}$.

(d) Para quais valores de a o matriz $\underline{\underline{B}}$ tem inverso? Para estes valores, encontrar o inverso.

Dr. Ole Peter Smith
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal de Goiás
ole@mat.ufg.br - http://www.ime.ufg.br/docentes/olepeter

Data:	27/05/2009
Semestre:	
Curso:	Engenharia de Computação
Disciplina:	Álgebra Linear
Prova:	II

1. *2 pts.* Dado os vetores em relação ao base canônica, $(\underline{\mathbf{e}}_1, \underline{\mathbf{e}}_2, \underline{\mathbf{e}}_3, \underline{\mathbf{e}}_4, \underline{\mathbf{e}}_5)$, em $\mathbb{R}^5$:

$$\underline{\mathbf{v}}_1 = (1,1,1,1,1)^T \qquad \underline{\mathbf{v}}_2 = (1,-1,1,-1,1)^T \qquad \underline{\mathbf{v}}_3 = (3,-1,3,-1,3)^T \qquad \underline{\mathbf{v}}_4 = (0,1,0,1,0)^T$$

   (a) Mostre que: $V = ger(\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2) = ger(\underline{\mathbf{v}}_3, \underline{\mathbf{v}}_4)$. Qual a dimensão do V?

   (b) Escreve $\underline{\mathbf{v}}_1$ e $\underline{\mathbf{v}}_2$ como combinações lineares de $\underline{\mathbf{v}}_3$ e $\underline{\mathbf{v}}_4$.

   (c) Escreve $\underline{\mathbf{v}}_3$ e $\underline{\mathbf{v}}_4$ como combinações lineares de $\underline{\mathbf{v}}_1$ e $\underline{\mathbf{v}}_2$.

2. *6 pts.* Dado os vetores em relação ao base canônica, $(\underline{\mathbf{e}}_1, \underline{\mathbf{e}}_2, \underline{\mathbf{e}}_3, \underline{\mathbf{e}}_4)$, em $\mathbb{R}^4$:

$$\underline{\mathbf{v}}_1 = (1,1,1,1)^T \qquad \underline{\mathbf{v}}_2 = (1,-1,1,-1)^T \qquad \underline{\mathbf{v}}_3 = (1,1,-1,-1)^T \qquad \underline{\mathbf{v}}_4 = (1,-1,-1,1)^T$$

   (a) Mostre que os $\underline{\mathbf{v}}_i$'s são mutualmente ortogonais, isto é: $\underline{\mathbf{v}}_i \cdot \underline{\mathbf{v}}_j = 0$ por $i \neq j$.

   (b) Encontrar um base *ortonormal* de $\mathbb{R}^4$, $(\underline{\mathbf{d}}_1, \underline{\mathbf{d}}_2, \underline{\mathbf{d}}_3, \underline{\mathbf{d}}_4)$, tal que: $\underline{\mathbf{d}}_i = c_i \underline{\mathbf{v}}_i$.

   (c) Encontrar uma relação matricial entre os coordenados em relação aos $\underline{\mathbf{e}}_i$'s (antigos), $\underline{\mathbf{x}}_A$, e os coordenados em relação aos $\underline{\mathbf{d}}_i$'s (novos), $\underline{\mathbf{x}}_N$:

$$\underline{\mathbf{x}}_A = \underline{\underline{\mathbf{D}}}\,\underline{\mathbf{x}}_N$$

   (d) Encontrar uma relação matricial entre os coordenados novos, $\underline{\mathbf{x}}_N$, e os coordenados antigos, $\underline{\mathbf{x}}_A$:

$$\underline{\mathbf{x}}_N = \underline{\underline{\mathbf{D}}}'\,\underline{\mathbf{x}}_A$$

   (e) Justificar que vale: $\underline{\underline{\mathbf{D}}}' = \underline{\underline{\mathbf{D}}}^{-1} = \underline{\underline{\mathbf{D}}}^T = \underline{\underline{\mathbf{D}}}$.

   (f) Encontrar os coordenados dos vetores:

$$\underline{\mathbf{w}}_1 = (-1,1,-1,1)^T \qquad \underline{\mathbf{w}}_2 = (1,2,3,4)^T$$

   em relação ao base novo, $(\underline{\mathbf{d}}_1, \underline{\mathbf{d}}_2, \underline{\mathbf{d}}_3, \underline{\mathbf{d}}_4)$.

3. *2 pts.* (Cabeludo?) *Ortogonalização de Graham-Schmidt*
   Dado os vetores em $\mathbb{R}^3$:

$$\underline{\mathbf{v}}_1 = (1,1,1)^T \qquad \underline{\mathbf{v}}_2 = (1,-1,1)^T \qquad \underline{\mathbf{v}}_3 = (1,1,-1)^T$$

   (a) Mostre que $\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2, \underline{\mathbf{v}}_3$ *não* são mutualmente ortogonais.

   (b) Mostre que $\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2, \underline{\mathbf{v}}_3$ são linearmente independentes.

   (c) Escolhendo: $\underline{\mathbf{d}}_1 = \underline{\mathbf{v}}_1$ e $\underline{\mathbf{d}}_2 = \underline{\mathbf{v}}_2 + \alpha \underline{\mathbf{d}}_1$, mostre que por:

$$\alpha = -\frac{\underline{\mathbf{d}}_1 \cdot \underline{\mathbf{v}}_2}{\underline{\mathbf{d}}_1 \cdot \underline{\mathbf{d}}_1}$$

   obtemos um vetor, $\underline{\mathbf{d}}_2 \perp \underline{\mathbf{d}}_1$. Encontrar $\underline{\mathbf{d}}_2$.

   (d) Escolhendo: $\underline{\mathbf{d}}_3 = \underline{\mathbf{v}}_3 + \beta \underline{\mathbf{d}}_1 + \gamma \underline{\mathbf{d}}_2$, mostre que por:

$$\beta = -\frac{\underline{\mathbf{d}}_1 \cdot \underline{\mathbf{v}}_3}{\underline{\mathbf{d}}_1 \cdot \underline{\mathbf{d}}_1} \qquad \gamma = -\frac{\underline{\mathbf{d}}_2 \cdot \underline{\mathbf{v}}_3}{\underline{\mathbf{d}}_2 \cdot \underline{\mathbf{d}}_2}$$

   obtemos um vetor, $\underline{\mathbf{d}}_3 \perp \underline{\mathbf{d}}_1$ e $\underline{\mathbf{d}}_3 \perp \underline{\mathbf{d}}_2$. Encontrar $\underline{\mathbf{d}}_3$.

$\mu\alpha\tau\epsilon\mu\alpha\tau\iota\kappa\alpha$
Made in LaTeX

Dr. Ole Peter Smith
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal de Goiás
ole@mat.ufg.br - http://www.ime.ufg.br/docentes/olepeter

Data: 05/06/2009
Semestre:
Curso: Engenharia de Computação
Disciplina: Álgebra Linear
Prova: II - 2^a chamada

1. *2 pts.* Dado os vetores em relação ao base canônica, $(\underline{\mathbf{e}}_1, \underline{\mathbf{e}}_2, \underline{\mathbf{e}}_3, \underline{\mathbf{e}}_4, \underline{\mathbf{e}}_5)$, em $\mathbb{R}^5$:

$$\underline{\mathbf{v}}_1 = (1,2,2,2,1)^T \qquad \underline{\mathbf{v}}_2 = (1,0,0,0,1)^T \qquad \underline{\mathbf{v}}_3 = (2,2,2,2,2)^T \qquad \underline{\mathbf{v}}_4 = (0,1,1,1,0)^T$$

   (a) Mostre que: $V = ger(\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2) = ger(\underline{\mathbf{v}}_3, \underline{\mathbf{v}}_4)$. Qual a dimensão do V?
   (b) Escreve $\underline{\mathbf{v}}_1$ e $\underline{\mathbf{v}}_2$ como combinações lineares de $\underline{\mathbf{v}}_3$ e $\underline{\mathbf{v}}_4$.
   (c) Escreve $\underline{\mathbf{v}}_3$ e $\underline{\mathbf{v}}_4$ como combinações lineares de $\underline{\mathbf{v}}_1$ e $\underline{\mathbf{v}}_2$.

2. *3 pts.* Qual a dimensão dos conjuntos gerados de:
   (a) $f_1(x) = x(1-x)$, $f_2(x) = x(1+x)$, $f_3(x) = x(1-x^2)$ e $f_4(x) = x(3-x^2)$.
   (b) $\underline{\mathbf{v}}_1 = (1,-1,-1,-1)^T$, $\underline{\mathbf{v}}_2 = (1,1,-1,-1)^T$, $\underline{\mathbf{v}}_3 = (1,1,1,-1)^T$, $\underline{\mathbf{v}}_4 = (1,1,1,1)^T$, $\underline{\mathbf{v}}_5 = (0,0,1,1)^T$.
   (c) $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_3 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. *3 pts.* Dado os vetores em $\mathbb{R}^3$:

$$\underline{\mathbf{v}}_1 = (1,1,1)^T \qquad \underline{\mathbf{v}}_2 = (1,1,0)^T \qquad \underline{\mathbf{v}}_3 = (1,0,1)^T$$

   (a) Mostre que $(\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2, \underline{\mathbf{v}}_3)$ formam uma base em $\mathbb{R}^3$.
   (b) Encontrar uma relação matricial expressando os coordenados em relação ao base $(\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2, \underline{\mathbf{v}}_3)$, em termos dos coordenados em relação ao base canônica, $(\underline{\mathbf{i}}, \underline{\mathbf{j}}, \underline{\mathbf{k}})$.
   (c) Encontrar os coordenados em relação ao base $(\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2, \underline{\mathbf{v}}_3)$ dos vetores: $\underline{\mathbf{w}}_1 = (1,2,3)^T$ e $\underline{\mathbf{w}}_2 = (3,2,1)^T$

4. *2 pts.* Considere os vetores do exercísio anterior:

$$\underline{\mathbf{v}}_1 = (1,1,1)^T \qquad \underline{\mathbf{v}}_2 = (1,1,0)^T \qquad \underline{\mathbf{v}}_3 = (1,0,1)^T$$

   (a) Definindo: $\underline{\mathbf{d}}_1 = \underline{\mathbf{v}}_1$ e $\underline{\mathbf{d}}_2 = \underline{\mathbf{d}}_1 \times \underline{\mathbf{v}}_2$. Encontrar $\underline{\mathbf{d}}_1$ e $\underline{\mathbf{d}}_2$. Mostrar que $\underline{\mathbf{d}}_1$ e $\underline{\mathbf{d}}_2$ são ortogonais.
   (b) Definindo: $\underline{\mathbf{d}}_3 = \underline{\mathbf{d}}_1 \times \underline{\mathbf{d}}_2$. Encontrar $\underline{\mathbf{d}}_3$. Mostrar que $\underline{\mathbf{d}}_1$ é ortogonal em $\underline{\mathbf{d}}_1$e $\underline{\mathbf{d}}_2$.
   (c) Encontrar uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, cuja os eixos são paralelos com os vetores $\underline{\mathbf{d}}_1$, $\underline{\mathbf{d}}_2$ e $\underline{\mathbf{d}}_3$. Encontrar o matriz deste substituição ortonormal, $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$. Demostrar que $\underline{\underline{\mathbf{M}}}^{-1} = \underline{\underline{\mathbf{M}}}^T$ e encontrar seu determinante.
   (d) Encontrar neste base os coordenados dos vetores: $\underline{\mathbf{w}}_1 = (0,1,1)^T$ e $\underline{\mathbf{w}}_2(0,0,1)^T$.

$\mu\alpha\tau\epsilon\mu\alpha\tau\iota\kappa\alpha$
Made in LaTeX

Dr. Ole Peter Smith
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal de Goiás
ole@mat.ufg.br - http://www.ime.ufg.br/docentes/olepeter

Data: 17/06/2009
Semestre:
Curso: Engenharia Civil
Disciplina: Álgebra Linear
Prova: II

1. *2 pts.* Dado os vetores em relação ao base canônica, $(\underline{\mathbf{e}}_1, \underline{\mathbf{e}}_2, \underline{\mathbf{e}}_3, \underline{\mathbf{e}}_4, \underline{\mathbf{e}}_5)$, em $\mathbb{R}^5$:
$$\underline{\mathbf{v}}_1 = (1, 2, 2, 2, 1)^T \qquad \underline{\mathbf{v}}_2 = (1, 0, 0, 0, 1)^T \qquad \underline{\mathbf{v}}_3 = (2, 2, 2, 2, 2)^T \qquad \underline{\mathbf{v}}_4 = (0, 1, 1, 1, 0)^T$$
   (a) Mostre que: $V = ger(\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2) = ger(\underline{\mathbf{v}}_3, \underline{\mathbf{v}}_4)$. Qual a dimensão do V?
   (b) Escreve $\underline{\mathbf{v}}_1$ e $\underline{\mathbf{v}}_2$ como combinações lineares de $\underline{\mathbf{v}}_3$ e $\underline{\mathbf{v}}_4$.
   (c) Escreve $\underline{\mathbf{v}}_3$ e $\underline{\mathbf{v}}_4$ como combinações lineares de $\underline{\mathbf{v}}_1$ e $\underline{\mathbf{v}}_2$.
2. *3 pts.* Qual a dimensão dos conjuntos gerados de:
   (a) $f_1(x) = x(1-x)$, $f_2(x) = x(1+x)$, $f_3(x) = x(1-x^2)$ e $f_4(x) = x(3-x^2)$.
   (b) $\underline{\mathbf{v}}_1 = (1, -1, -1, -1)^T$, $\underline{\mathbf{v}}_2 = (1, 1, -1, -1)^T$, $\underline{\mathbf{v}}_3 = (1, 1, 1, -1)^T$, $\underline{\mathbf{v}}_4 = (1, 1, 1, 1)^T$, $\underline{\mathbf{v}}_5 = (0, 0, 1, 1)^T$.
   (c) $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_3 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
3. *3 pts.* Dado os vetores em $\mathbb{R}^3$:
$$\underline{\mathbf{v}}_1 = (1, 1, 1)^T \qquad \underline{\mathbf{v}}_2 = (1, 1, 0)^T \qquad \underline{\mathbf{v}}_3 = (1, 0, 1)^T$$
   (a) Mostre que $(\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2, \underline{\mathbf{v}}_3)$ formam uma base em $\mathbb{R}^3$.
   (b) Encontrar uma relação matricial expressando os coordenados em relação ao base $(\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2, \underline{\mathbf{v}}_3)$, em termos dos coordenados em relação ao base canônica, $(\underline{\mathbf{i}}, \underline{\mathbf{j}}, \underline{\mathbf{k}})$.
   (c) Encontrar os coordenados em relação ao base $(\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2, \underline{\mathbf{v}}_3)$ dos vetores: $\underline{\mathbf{w}}_1 = (1, 2, 3)^T$ e $\underline{\mathbf{w}}_2 = (3, 2, 1)^T$
4. *2 pts.* Considere os vetores do exercísio anterior:
$$\underline{\mathbf{v}}_1 = (1, 1, 1)^T \qquad \underline{\mathbf{v}}_2 = (1, 1, 0)^T \qquad \underline{\mathbf{v}}_3 = (1, 0, 1)^T$$
   (a) Definindo: $\underline{\mathbf{d}}_1 = \underline{\mathbf{v}}_1$ e $\underline{\mathbf{d}}_2 = \underline{\mathbf{d}}_1 \times \underline{\mathbf{v}}_2$. Encontrar $\underline{\mathbf{d}}_1$ e $\underline{\mathbf{d}}_2$. Mostrar que $\underline{\mathbf{d}}_1$ e $\underline{\mathbf{d}}_2$ são ortogonais.
   (b) Definindo: $\underline{\mathbf{d}}_3 = \underline{\mathbf{d}}_1 \times \underline{\mathbf{d}}_2$. Encontrar $\underline{\mathbf{d}}_3$. Mostrar que $\underline{\mathbf{d}}_3$ é ortogonal em $\underline{\mathbf{d}}_1$e $\underline{\mathbf{d}}_2$.
   (c) Encontrar uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, cuja os eixos são paralelos com os vetores $\underline{\mathbf{d}}_1$, $\underline{\mathbf{d}}_2$ e $\underline{\mathbf{d}}_3$. Encontrar o matriz deste substituição ortonormal, $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$. Demostrar que $\underline{\underline{\mathbf{M}}}^{-1} = \underline{\underline{\mathbf{M}}}^T$ e encontrar seu determinante.
   (d) Encontrar neste base os coordenados dos vetores: $\underline{\mathbf{w}}_1 = (0, 1, 1)^T$ e $\underline{\mathbf{w}}_2(0, 0, 1)^T$.

$\mu\alpha\tau\epsilon\mu\alpha\tau\iota\kappa\alpha$
Made in LaTeX

Dr. Ole Peter Smith
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal de Goiás
ole@mat.ufg.br - http://www.ime.ufg.br/docentes/olepeter

Data:	03/07/2009
Semestre:	
Curso:	Engenharia Civil
Disciplina:	Álgebra Linear
Prova:	III - Chamada Extra

1. (465) *4 pts.* Dado o matriz, $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, de uma aplicação linear, $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

   (a) Mostre que o núcleo (kernel), $ker f = \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^4 | \ \underline{\underline{\mathbf{A}}}\ \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}}\}$, tem dimensão 0.

   (b) Encontrar autovalores e autovetores de f.

   (c) Mostre que é possível escolher um base de autovetores de f.

   (d) Encontre o matriz, $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$, de f ao respeito desde base. Qual a relação entre $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ e $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$?

2. (341, c) *4 pts.* Dado a forma quadrática:

$$(*) \ \ x^2 + y^2 - z^2 + 2xy$$

   (a) Encontrar uma substituição ortogonal, $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$, que reduz $(*)$ em uma forma sem termos mistos: $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \lambda_3 x z_1^2$ - onde $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$.

   (b) Classificar geométricalmente: $x^2 + y^2 - z^2 + 2xy - 2x - 4y - 1 = 0$.

3. (471) *2 pts.* (Projeção ortogonal.) Uma aplicação linear, f, é dado por:

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = (\underline{\mathbf{x}} \cdot \underline{\mathbf{e}})\underline{\mathbf{e}} - \underline{\mathbf{x}}$$

   onde $\underline{\mathbf{e}}$ é um vetor de unidade dado (fixo).

   (a) Fazer uma figura indicando os vetores $\underline{\mathbf{e}}$, $\underline{\mathbf{x}}$ e $f(\underline{\mathbf{x}})$.

   (b) Mostre que a imagem do f é perpendicular em $\underline{\mathbf{e}}$.

   (c) Seja $\underline{\mathbf{i}}$ e $\underline{\mathbf{j}}$ dois vetores unitários e ortogonais. Pondo: $\underline{\mathbf{e}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\underline{\mathbf{i}} + \frac{\sqrt{2}}{2}\underline{\mathbf{j}}$. Encontrar o matriz, $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, de f em relação ao base $(\underline{\mathbf{i}}, \underline{\mathbf{j}})$.

$\mu\alpha\tau\epsilon\mu\alpha\tau\iota\kappa\alpha$
Made in LaTeX

Dr. Ole Peter Smith
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal de Goiás
ole@mat.ufg.br - http://www.ime.ufg.br/docentes/olepeter

Data:	08/07/2009
Semestre:	
Curso:	Engenharia Civil e Computação
Disciplina:	Álgebra Linear
Prova:	III

1. (410) *4 pts.* Em $\mathbb{R}^4$ são dado os vetores:

$$\underline{\mathbf{d}}_1 = (1,2,2,0)^T \quad \underline{\mathbf{d}}_2 = (0,1,1,1)^T \quad \underline{\mathbf{d}}_3 = (0,0,1,1)^T \quad \underline{\mathbf{d}}_4 = (1,1,1,1)^T$$

   (a) Mostre que $\underline{\mathbf{d}}_1, \underline{\mathbf{d}}_2, \underline{\mathbf{d}}_3, \underline{\mathbf{d}}_4$ formam uma base em $\mathbb{R}^4$.

   (b) Uma aplicação linear, $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ é dado por:

$$f(\underline{\mathbf{d}}_1) = (1,1,2)^T \quad f(\underline{\mathbf{d}}_2) = (3,-1,1)^T \quad f(\underline{\mathbf{d}}_3) = (4,0,3)^T \quad f(\underline{\mathbf{d}}_4) = (-5,3,0)^T$$

   Encontrar a matriz do f em respeito ao base $\underline{\mathbf{d}}_i$ em $\mathbb{R}^4$ e a base canônica em $\mathbb{R}^3$.

   (c) Encontrar a matriz do f em respeito ao base canônica em $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^3$.

   (d) Encontrar a dimensão do imagem do f.

   (e) Dados os vetores: $\underline{\mathbf{v}}_1 = \underline{\mathbf{d}}_1 + \underline{\mathbf{d}}_2 - \underline{\mathbf{d}}_3$ e $\underline{\mathbf{v}}_2 = -\underline{\mathbf{d}}_1 + 2\underline{\mathbf{d}}_2 + \underline{\mathbf{d}}_4$.
   Mostre que: $ker f = \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^4 | \, f(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\mathbf{0}} \right\} = ger(\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2)$.

   (f) Encontrar a solução completa da equação: $f(\underline{\mathbf{x}}) = f(\underline{\mathbf{d}}_1)$.

2. (403) *4 pts.* Dado a superfície:

$$(*) \;\; 3x^2 - 3y^2 + 12xz + 12yz + 4x - 4y - 2z = 0$$

   (a) Encontrar a parte linear do $(*)$, $F_1(x,y,z)$.

   (b) Encontrar a parte quadrática do $(*)$, $F_2(x,y,z)$, e escreve-a na forma matricial: $\underline{\mathbf{r}}^T \underline{\underline{\mathbf{A}}} \, \underline{\mathbf{r}}$.

   (c) Encontrar autovalores e autovetores da matriz $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$.

   (d) Encontrar uma base ortonormal, $\underline{\mathbf{d}}_i$, de autovetores da $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$.

   (e) Encontrar uma substituição ortogonal, $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$, e uma matriz diagonal, $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$, tal que: $\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{D}}}^T \underline{\underline{\mathbf{A}}} \, \underline{\underline{\mathbf{D}}}$.

   (f) Transformar, usando o item anterior, F_2 em uma forma quadrática sem termos mistos.

   (g) Encontrar $F_1(x,y,z)$ em termos dos coordenados novos.

   (h) Classificar $(*)$ geometricalmente.

3. (442) *2 pts.* Seja $\underline{\mathbf{a}}$ e $\underline{\mathbf{b}}$ vetores fixos em $\mathbb{R}^3$ que satisfaz:

$$|\underline{\mathbf{a}}| = |\underline{\mathbf{b}}| = \sqrt{2} \qquad \underline{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{b}} = 1$$

   A aplicação, f, é dado por:

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\mathbf{a}} \times \underline{\mathbf{x}} + (\underline{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{x}})\underline{\mathbf{b}}$$

   (a) Mostrar que f é uma aplicação linear.
   No resto deste exercísio, pomos: $\underline{\mathbf{c}} = \underline{\mathbf{a}} \times \underline{\mathbf{b}}$

   (b) Mostre $\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}}, \underline{\mathbf{c}}$ formam uma base em $\mathbb{R}^3$. Mostre que o matrix ao respeito desde base é dado por:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Informamos, que para o produto vetorial duplo, vale:

$$\underline{\mathbf{a}} \times (\underline{\mathbf{b}} \times \underline{\mathbf{c}}) = (\underline{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{c}})\underline{\mathbf{b}} - (\underline{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{b}})\underline{\mathbf{c}}$$

   (c) Encontrar autovalores e autovetores do f.

   (d) Encontrar a dimensão da imagem e uma base da mesma.

Dr. Ole Peter Smith
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal de Goiás
ole@mat.ufg.br - http://www.ime.ufg.br/docentes/olepeter

Data: 06/10/2009
Semestre: 2009.2
Curso: *
Disciplina: Álgebra Linear
Prova: I

1. (390) *4 pts.* Dado o matriz:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

   (a) Encontrar $\det \underline{\underline{\mathbf{A}}}$ para qualquer valor de λ.
   (b) Para quais valores de λ $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ é singular?
   (c) Para $\lambda = 1$ encontrar o matriz adjunto de $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$.
   (d) Para $\lambda = 2$ encontrar o matriz inversa de $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$.
   (e) Para $\lambda = 0$ resolver o sistema homogêneo $(1) : \underline{\underline{\mathbf{A}}}\ \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}}$. Encontrar a dimensão e uma base desde espaço solucional.
   (f) Para $\lambda = 3$ resolver o sistema homogêneo $(2) : \underline{\underline{\mathbf{A}}}\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}}$. Encontrar a dimensão e uma base desde espaço solucional.
   (g) Mostre que qualquer vetor do espaço solucional de (1) é ortogonal em qualquer vetor do espaço solucional de (2).

2. (387) *2 pts.* Dado os vetores:

$$\underline{\mathbf{a}}_1 = (0,1,2,2,0)^T \quad \underline{\mathbf{a}}_2 = (1,1,4,0,0)^T \quad \underline{\mathbf{a}}_3 = (1,2,6,2,1)^T \quad \underline{\mathbf{a}}_4 = (-1,2,2,6,-1)^T$$

   (a) Mostrar que $\underline{\mathbf{a}}_1, \underline{\mathbf{a}}_2, \underline{\mathbf{a}}_3$ são linearmente independentes.
   (b) Escrever $\underline{\mathbf{a}}_4$ como uma combinação linear de $\underline{\mathbf{a}}_1, \underline{\mathbf{a}}_2, \underline{\mathbf{a}}_3$

3. (371) *4 pts.* Dado o matriz e o vetor::

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1+a & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \\ b \end{pmatrix}, \quad b \in \mathbb{R}$$

   Considerando o sistema linear:

$$(*) \quad \underline{\underline{\mathbf{A}}}\ \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}$$

   (a) Encontrar $\det \underline{\underline{\mathbf{A}}}$ para qualquer $a \in \mathbb{R}$.
   (b) Encontrar o posto do matriz $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ para qualquer $a \in \mathbb{R}$.
   (c) Encontrar o posto do matriz total do sistema $(*)$ para qualquer $a, b \in \mathbb{R}$ e no cada caso a dimensão do espaço solucional.
   (d) Resolver o sistema $(*)$ para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$.

$\mu\alpha\tau\epsilon\mu\alpha\tau\iota\kappa\alpha$
Made in LaTeX

Dr. Ole Peter Smith
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal de Goiás
ole@mat.ufg.br - http://www.ime.ufg.br/docentes/olepeter

Data:	13/10/2009
Semestre:	2009.2
Curso:	Estatística
Disciplina:	Álgebra Linear
Prova:	I - 2^a Chamada

1. *4 pts.* Dado o matriz, $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, e o vetor, $\underline{\mathbf{b}}$:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 1 & a-1 & 2 & a+2 \\ 1 & 2a & 0 & a \\ 0 & -a-1 & 2a+2 & 0 \\ 0 & 2a+2 & 4a-4 & a^2+a-8 \end{pmatrix}, \qquad \underline{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} a+b \\ 2a+b \\ 0 \\ 4a+ab+b \end{pmatrix}$$

E o sistema linear:

$$(*): \quad \underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}$$

(a) Encontrar o posto da matriz coefficiente, $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, por qualquer valor de $a \in \mathbb{R}$.

(b) Encontrar o posto da matriz augmentada, $\underline{\underline{\mathbf{T}}} = (\underline{\underline{\mathbf{A}}}|\underline{\mathbf{b}})$, por quaisquer valores de $a, b \in \mathbb{R}$.

(c) Encontrar os valores (a, b) tal que o sistema $(*)$ não tem solução.

(d) Encontrar os valores (a, b) tal que o sistema $(*)$ tem solução única.

(e) Encontrar os valores (a, b) tal que o sistema $(*)$ tem infinitas solução.

(f) Resolver o sistema $(*)$ para $(a, b) = (-1, 1)$. Identificar nesta solução a solução completa do sistema homogênea (SCSH) e uma solução particular do sistema inhomogênea (SPSñH).

2. *3 pts.* Dado os vetores:

$$\underline{\mathbf{a}}_1 = (1, -1, 2, 1)^T \quad \underline{\mathbf{a}}_2 = (0, 1, 1, 3)^T \quad \underline{\mathbf{a}}_3 = (1, -2, 2, -1)^T \quad \underline{\mathbf{a}}_4 = (0, 1, -1, 3)^T \quad \underline{\mathbf{a}}_5 = (1, -2, 2, -3)^T$$

(a) Mostre que $\underline{\mathbf{a}}_1, \underline{\mathbf{a}}_2, \underline{\mathbf{a}}_3, \underline{\mathbf{a}}_4$ formam uma base de $\mathbb{R}^4$.

(b) Encontrar os coordenados do vetor $\underline{\mathbf{a}}_5$ neste base.

(c) Encontrar os coordenados dos vetores $\underline{\mathbf{a}}_1, \underline{\mathbf{a}}_2, \underline{\mathbf{a}}_3, \underline{\mathbf{a}}_4$ neste base.

(d) Encontrar os coordenados dos vetores $\underline{\mathbf{a}}_1, \underline{\mathbf{a}}_2, \underline{\mathbf{a}}_3, \underline{\mathbf{a}}_4$ no base canônica.

3. *3 pts.* Dado os matrices:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \underline{\underline{\mathbf{B}}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Mostre que $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ é regular.

(b) Encontrar $\underline{\underline{\mathbf{B}}}^{-1}$.

(c) Resolver a equação matricial: $\underline{\underline{\mathbf{X}}}\,\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}$.

Dr. Ole Peter Smith
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal de Goiás
ole@mat.ufg.br - http://www.ime.ufg.br/docentes/olepeter

Data:	16/10/2009
Semestre:	2009.2
Curso:	Física
Disciplina:	Álgebra Linear
Prova:	I - 2^a Chamada

1. *4 pts.* Dado o matriz, $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, e o vetor, $\underline{\mathbf{b}}$:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2a & a \\ 1 & a & 2a & 1 \\ 1 & 1 & a & 2a \\ 1 & a & a & 2a \end{pmatrix}, \qquad \underline{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$$

E o sistema linear:

$$(*): \quad \underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}$$

   (a) Encontrar o posto da matriz coefficiente, $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, por qualquer valor de $a \in \mathbb{R}$.
   (b) Encontrar o posto da matriz aumentada, $\underline{\underline{\mathbf{T}}} = (\underline{\underline{\mathbf{A}}}|\underline{\mathbf{b}})$, por qualquer valores de $a \in \mathbb{R}$.
   (c) Encontrar os valores a tal que o sistema $(*)$ não tem solução.
   (d) Encontrar os valores a tal que o sistema $(*)$ tem solução única.
   (e) Encontrar os valores a tal que o sistema $(*)$ tem infinitas soluções.
   (f) Resolver o sistema $(*)$ para $a = 1$.
   (g) Identificar na solução do item anterior a solução completa do sistema homogênea (SCSH) e uma solução particular do sistema inhomogênea (SPSñH).

2. *3 pts.* Dado os vetores:

$$\underline{\mathbf{a}}_1 = (1, 0, -1)^T \qquad \underline{\mathbf{a}}_2 = (1, 1, 1)^T \qquad \underline{\mathbf{a}}_3 = (1, -1, 1)^T$$

   (a) Mostre que $\underline{\mathbf{a}}_1, \underline{\mathbf{a}}_2, \underline{\mathbf{a}}_3$ formam uma base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Encontrar uma equação expressando coordenados em relação à base $\underline{\mathbf{a}}_1, \underline{\mathbf{a}}_2, \underline{\mathbf{a}}_3$, em termos dos coordenados em relação à base canônica em $\mathbb{R}^3$.
   (c) Encontrar os coordenados dos vetores básicos da base canônica em $\mathbb{R}^3$, na base $\underline{\mathbf{a}}_1, \underline{\mathbf{a}}_2, \underline{\mathbf{a}}_3$.

3. *3 pts.* Dado a matriz:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Mostre que $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ é singular.
   (b) Resolver a sistema homogênea: $\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}}$.
   (c) Resolver a equação matricial: $\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\underline{\mathbf{X}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}^2$.
   Hint: Pode ser conveniente usar, que $\underline{\underline{\mathbf{X}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}$ é uma solução particular da equação matricial.

Dr. Ole Peter Smith
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal de Goiás
ole@mat.ufg.br - http://www.ime.ufg.br/docentes/olepeter

Data:	19/10/2009
Semestre:	2009.2
Curso:	Engenharia Mecânica
Disciplina:	Álgebra Linear
Prova:	I - 2^a Chamada

1. *4 pts.* Dado as matrizes, $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ e $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & a & 1 \\ 2 & a+2 & a-2 \\ 1 & a+1 & a-1 \end{pmatrix}, \qquad \underline{\underline{\mathbf{b}}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ b & b \\ b-1 & 2b+1 \end{pmatrix}$$

E a equação:

$$(*): \quad \underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\underline{\mathbf{X}}} = \underline{\underline{\mathbf{B}}}$$

   (a) Encontrar o posto da matriz coefficiente, $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, por qualquer valor de $a \in \mathbb{R}$.

   (b) Encontrar o posto da matriz augmentada, $\underline{\underline{\mathbf{T}}} = (\underline{\underline{\mathbf{A}}}|\underline{\underline{\mathbf{B}}})$, por quaisquer valores de $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

   (c) Encontrar os valores (a,b) tal que a equação $(*)$ não tem solução (incompatível).

   (d) Encontrar os valores (a,b) tal que a equação $(*)$ tem solução única (determinado).

   (e) Encontrar os valores (a,b) tal que a equação $(*)$ tem infinitas soluções (indeterminado).

   (f) Resolver a equação $(*)$ para $(a,b) = (2,0)$.

2. *3 pts.* Dado as matrizes:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \underline{\underline{\mathbf{B}}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

   (a) Encontrar $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1}$.

   (b) Encontrar $\underline{\underline{\mathbf{B}}}^{-1}$.

   (c) Encontrar $(\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\underline{\mathbf{B}}})^{-1}$.

3. *3 pts.* Dado os vetores:

$$\underline{\mathbf{d}}_1 = \frac{1}{2}(1,1,1,1)^T \quad \underline{\mathbf{d}}_2 = \frac{1}{2}(-1,1,-1,1)^T \quad \underline{\mathbf{d}}_3 = \frac{1}{2}(-1,-1,1,1)^T \quad \underline{\mathbf{d}}_4 = \frac{1}{2}(-1,1,1,-1)^T \quad \underline{\mathbf{d}}_5 = (1,2,1,2)^T$$

   (a) Mostre que $(\underline{\mathbf{d}}_1, \underline{\mathbf{d}}_2, \underline{\mathbf{d}}_3, \underline{\mathbf{d}}_4)$ formam uma base *ortonormal* em $\mathbb{R}^4$.

   (b) Encontrar os coordenados do vetor $\underline{\mathbf{d}}_5$ em relação a base $(\underline{\mathbf{d}}_1, \underline{\mathbf{d}}_2, \underline{\mathbf{d}}_3, \underline{\mathbf{d}}_4)$.

   (c) Encontrar os coordenados dos vetores da base canônica, $(\underline{\mathbf{e}}_1, \underline{\mathbf{e}}_2, \underline{\mathbf{e}}_3, \underline{\mathbf{e}}_4)$, em relação a base $(\underline{\mathbf{d}}_1, \underline{\mathbf{d}}_2, \underline{\mathbf{d}}_3, \underline{\mathbf{d}}_4)$.

UFG

Dr. Ole Peter Smith

Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal de Goiás
ole@mat.ufg.br - http://www.ime.ufg.br/docentes/olepeter

Data:	08/12/2009
Semestre:	2009.2
Curso:	Física
Disciplina:	Álgebra Linear
Prova:	II - 1^a Chamada

1. *4 pts.* Dado a forma quadrática:

$$F_2(x,y,z) = 6y^2 + 12xz$$

   (a) Encontrar uma matriz simétrica, tal que: $F(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\mathbf{x}}^T \underline{\underline{\mathbf{A}}}\, \underline{\mathbf{x}}$, onde $\underline{\mathbf{x}} = (x,y,z)$.

   (b) Encontrar os autovalores do $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$.

   (c) Encontrar os autovetores do $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$.

   (d) Encontrar uma base ortonormal de autovetores do $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$.

   (e) Encontrar uma matriz ortogonal,$\underline{\underline{\mathbf{D}}}$, e uma matriz diagonal, $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$, tal que: $\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{D}}}^{-1} \underline{\underline{\mathbf{A}}}\, \underline{\underline{\mathbf{D}}}$.

   (f) Com este substituição ortogonal, encontre uma relação entre os coordenados novos, $\underline{\mathbf{x}}'$, e os coordenados antigos, $\underline{\mathbf{x}}$, e vice-versa.

   (g) Encontrar $F_2'(\underline{\mathbf{x}}') = F_2(\underline{\mathbf{x}})$.

   (h) Classifique a superfície:

$$6y^2 + 12xz + 2x - 2y + 2z = 3$$

2. *2 pts.* Dado a matriz:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

   E a aplicação linear: $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3 : f(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\underline{\mathbf{A}}}\, \underline{\mathbf{x}}$.

   (a) Encontrar o núcleo de f e sua dimensão.

   (b) Encontrar a dimensão e uma base da imagem da f.

   (c) Pondo, $\underline{\mathbf{d}} = (1,2,1)^T$, encontrar a solução completa de: $f(\underline{\mathbf{x}}) = f(\underline{\mathbf{d}})$.

3. *2 pts.* Dado a matriz:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 10 & -2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & 6 \end{pmatrix}$$

   E uma função bilinear: $g(x,y) = (x\ y)\underline{\underline{\mathbf{A}}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

   (a) Encontrar os autovalores e autovetores do $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$.

   (b) Mostre que $g(x,y)$ define um produto interno em $\mathbb{R}^2$.

   (c) Dado o vetor $\underline{\mathbf{v}}_1 = (1,-1)^T$, encontrar um vetor, $\underline{\mathbf{v}}_2$ ortogonal ao $\underline{\mathbf{v}}_1$ ao respeito de g.

   (d) Encontrar uma base ortonormal ao respeito do produto interno g.

Dr. Ole Peter Smith
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal de Goiás
ole@mat.ufg.br - http://www.ime.ufg.br/docentes/olepeter

Data:	08/12/2009
Semestre:	2009.2
Curso:	Estatística
Disciplina:	Álgebra Linear
Prova:	II - 1^a Chamada

1. *4 pts.* Dado a forma quadrática:

$$F_2(x,y,z) = 4z^2 + 8xy$$

   (a) Encontrar uma matriz simétrica, tal que: $F(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\mathbf{x}}^T \underline{\underline{\mathbf{A}}}\, \underline{\mathbf{x}}$, onde $\underline{\mathbf{x}} = (x,y,z)$.

   (b) Encontrar os autovalores do $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$.

   (c) Encontrar os autovetores do $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$.

   (d) Encontrar uma base ortonormal de autovetores do $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$.

   (e) Encontrar uma matriz ortogonal,$\underline{\underline{\mathbf{D}}}$, e uma matriz diagonal, $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$, tal que: $\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{D}}}^{-1} \underline{\underline{\mathbf{A}}}\, \underline{\underline{\mathbf{D}}}$.

   (f) Com este substituição ortogonal, encontre uma relação entre os coordenados novos, $\underline{\mathbf{x}}'$, e os coordenados antigos, $\underline{\mathbf{x}}$, e vice-versa.

   (g) Encontrar $F_2'(\underline{\mathbf{x}}') = F_2(\underline{\mathbf{x}})$.

   (h) Classifique a superfície:

$$4z^2 + 8xy + 2x - 2y = 3$$

2. *2 pts.* Dado a matriz:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

   E a aplicação linear: $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3 : f(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\underline{\mathbf{A}}}\, \underline{\mathbf{x}}$.

   (a) Encontrar o núcleo de f e sua dimensão.

   (b) Encontrar a dimensão e uma base da imagem da f.

   (c) Pondo, $\underline{\mathbf{d}} = (1,-1,0)^T$, encontrar a solução completa de: $f(\underline{\mathbf{x}}) = f(\underline{\mathbf{d}})$.

3. *2 pts.* Dado a matriz:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 7 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 5 \end{pmatrix}$$

   E uma função bilinear: $g(x,y) = (x\ y)\underline{\underline{\mathbf{A}}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

   (a) Encontrar os autovalores e autovetores do $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$.

   (b) Mostre que $g(x,y)$ define um produto interno em $\mathbb{R}^2$.

   (c) Dado o vetor $\underline{\mathbf{v}}_1 = (1,-1)^T$, encontrar um vetor, $\underline{\mathbf{v}}_2$ ortogonal ao $\underline{\mathbf{v}}_1$ ao respeito de g.

   (d) Encontrar uma base ortonormal ao respeito do produto interno g.

Dr. Ole Peter Smith
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal de Goiás
ole@mat.ufg.br - http://www.ime.ufg.br/docentes/olepeter

Data:	15/12/2009
Semestre:	2009.2
Curso:	Física
Disciplina:	Álgebra Linear
Prova:	II - 2^a Chamada

1. *3 pts.* Dado os vetores:

$$\underline{\mathbf{v}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{\mathbf{v}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{\mathbf{v}}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Uma aplicação linear, $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ é dado por:

$$f(\underline{\mathbf{v}}_1) = \underline{\mathbf{v}}_2 - \underline{\mathbf{v}}_3 \qquad f(\underline{\mathbf{v}}_2) = \underline{\mathbf{v}}_1 - \underline{\mathbf{v}}_3 \qquad f(\underline{\mathbf{v}}_3) = \underline{\mathbf{v}}_2 - \underline{\mathbf{v}}_1$$

   (a) Mostre que os vetores $\underline{\mathbf{v}}_i$ formam uma base em $\mathbb{R}^3$.
   (b) Encontrar o matriz de f na base $\underline{\mathbf{v}}_i$.
   (c) Encontrar o matriz de f na base canônica, $\underline{\mathbf{e}}_i$.

2. *2 pts.* Dado a matriz:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

   E a aplicação linear: $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3 : f(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\mathbf{x}}$.

   (a) Encontrar autovalores e autovetores do $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$.
   (b) Encontrar uma base ortonormal de autovetores da $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ e o matriz de f neste base.

3. *3 pts.* Dado a forma quadrática:

$$F(x,y) = 7x^2 - 2\sqrt{3}xy + 5y^2$$

   (a) Encontrar uma matriz simétrica, $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, tal que: $F(x,y) = (x\ y)\,\underline{\underline{\mathbf{A}}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
   (b) Encontrar autovetores e autovalores da $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$.
   (c) Encontrar uma substituição ortogonal, $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$, que transforma F em uma forma sem o termo xy.
   (d) Classificar a curva: $7x^2 - 2\sqrt{3}xy + 5y^2 + x = 4$.

Dr. Ole Peter Smith
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal de Goiás
ole@mat.ufg.br - http://www.ime.ufg.br/docentes/olepeter

Data: 15/12/2009
Semestre: 2009.2
Curso: Estatística
Disciplina: Álgebra Linear
Prova: II - 2^a Chamada

1. *3 pts.* Dado os vetores:

$$\underline{\mathbf{v}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \underline{\mathbf{v}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \underline{\mathbf{v}}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Uma aplicação linear, $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ é dado por:

$$f(\underline{\mathbf{v}}_1) = \underline{\mathbf{v}}_3 - \underline{\mathbf{v}}_2 \qquad f(\underline{\mathbf{v}}_2) = \underline{\mathbf{v}}_3 - \underline{\mathbf{v}}_1 \qquad f(\underline{\mathbf{v}}_3) = \underline{\mathbf{v}}_1 - \underline{\mathbf{v}}_2$$

   (a) Mostre que os vetores $\underline{\mathbf{v}}_i$ formam uma base em $\mathbb{R}^3$.
   (b) Encontrar o matriz de f na base $\underline{\mathbf{v}}_i$.
   (c) Encontrar o matriz de f na base canônica, $\underline{\mathbf{e}}_i$.

2. *2 pts.* Dado a matriz:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -4 \\ -4 & 5 & -4 \\ -4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

   E a aplicação linear: $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3 : f(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\underline{\mathbf{A}}}\ \underline{\mathbf{x}}$.

   (a) Encontrar autovalores e autovetores do $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$.
   (b) Encontrar uma base ortonormal de autovetores da $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ e o matriz de f neste base.

3. *3 pts.* Dado a forma quadrática:

$$F(x,y) = 7x^2 + 2\sqrt{3}xy - 5y^2$$

   (a) Encontrar uma matriz simétrica, $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, tal que: $F(x,y) = (x\ y)\,\underline{\underline{\mathbf{A}}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
   (b) Encontrar autovetores e autovalores da $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$.
   (c) Encontrar uma substituição ortogonal, $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$, que transforma F em uma forma sem o termo xy.
   (d) Classificar a curva: $7x^2 + 2\sqrt{3}xy - 5y^2 - y = 4$.

Dr. Ole Peter Smith
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal de Goiás
ole@mat.ufg.br - http://www.ime.ufg.br/docentes/olepeter

Data: 15/12/2009
Semestre: 2009.2
Curso: Estatística
Disciplina: Álgebra Linear
Prova: II - 2^a Chamada

1. *3 pts.* Dado os vetores:

$$\underline{\mathbf{v}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \underline{\mathbf{v}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \underline{\mathbf{v}}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Uma aplicação linear, $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ é dado por:

$$f(\underline{\mathbf{v}}_1) = \underline{\mathbf{v}}_3 - \underline{\mathbf{v}}_2 \qquad f(\underline{\mathbf{v}}_2) = \underline{\mathbf{v}}_3 - \underline{\mathbf{v}}_1 \qquad f(\underline{\mathbf{v}}_3) = \underline{\mathbf{v}}_1 - \underline{\mathbf{v}}_2$$

(a) Mostre que os vetores $\underline{\mathbf{v}}_i$ formam uma base em $\mathbb{R}^3$.

(b) Encontrar o matriz de f na base $\underline{\mathbf{v}}_i$.

(c) Encontrar o matriz de f na base canônica, $\underline{\mathbf{e}}_i$.

2. *2 pts.* Dado a matriz:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -4 \\ -4 & 5 & -4 \\ -4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

E a aplicação linear: $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3 : f(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\underline{\mathbf{A}}}\, \underline{\mathbf{x}}$.

(a) Encontrar autovalores e autovetores do $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$.

(b) Encontrar uma base ortonormal de autovetores da $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ e o matriz de f neste base.

3. *3 pts.* Dado a forma quadrática:

$$F(x, y) = 7x^2 + 2\sqrt{3}xy - 5y^2$$

(a) Encontrar uma matriz simétrica, $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, tal que: $F(x, y) = (x\ y)\, \underline{\underline{\mathbf{A}}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

(b) Encontrar autovetores e autovalores da $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$.

(c) Encontrar uma substituição ortogonal, $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$, que transforma F em uma forma sem o termo xy.

(d) Classificar a curva: $7x^2 + 2\sqrt{3}xy - 5y^2 - y = 4$.

Dr. Ole Peter Smith
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal de Goiás
ole@mat.ufg.br - http://www.ime.ufg.br/docentes/olepeter

Data:	23/03/2010
Semestre:	2010.1
Curso:	Matemática
Disciplina:	Álgebra Linear
Prova:	I

1. *2 pts.* Dado a matriz:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ -a & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}$$

   (a) Encontrar o posto do $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

   (b) Resolver a equação: $\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

   (c) Resolver a equação: $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^T\,\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$ para todo $b \in \mathbb{R}$.

   (d) Identifique a solução completa do sistema homogênea (SCSH) e uma solução particular do sistema não homogênea (SPSñH) no item anteriror.

2. *2 pts.* Com o matriz no item anterior pomos:

$$\underline{\underline{\mathbf{B}}}_1 = \underline{\underline{\mathbf{A}}}^T\underline{\underline{\mathbf{A}}} \qquad \underline{\underline{\mathbf{B}}}_2 = \underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\underline{\mathbf{A}}}^T$$

   (a) Calcular $\underline{\underline{\mathbf{B}}}_1$ e $\underline{\underline{\mathbf{B}}}_2$.

   (b) Calcular os determiantes $\det \underline{\underline{\mathbf{B}}}_1$ e $\det \underline{\underline{\mathbf{B}}}_2$.

   (c) Calcular as adjuntas $\underline{\underline{\mathbf{B}}}_1^*$ e $\underline{\underline{\mathbf{B}}}_2^*$.

   (d) Justifique que o produto de uma matriz com sua transposta é uma matriz simétrica.

3. *3 pts.*

   (a) Mostre que o determinante de ordem $n > 1$:

$$A_n = \begin{vmatrix} b & a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & & \ddots & & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & b & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & b & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix}$$

   satisfaz a fórmula de recursão: $A_n = bA_{n-1} - a^2A_{n-2}, \quad n \geq 3$.

   (b) Pondo $A_1 = b$, encontrar A_3.

   (c) Encontrar a determinante:

$$A = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

4. *3 pts.* Dado a matriz:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & 0 & 1 \\ 2\alpha & 2\alpha & \alpha & 1 \\ 2\alpha & 3\alpha & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

   (a) Encontrar o posto do $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ por todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (b) Por quais valores $\alpha \in \mathbb{R}$ $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ é regular? Por estes valores, encontrar a inversa.

   (c) Resolver a sistema:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$$

   para todos $\alpha, a, b \in \mathbb{R}$.

Dr. Ole Peter Smith
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal de Goiás
ole@mat.ufg.br - http://www.ime.ufg.br/docentes/olepeter

Data:	30/03/2010
Semestre:	2010.1
Curso:	Matemática
Disciplina:	Álgebra Linear
Prova:	I, 2^a Chamada

1. *4 pts.* Dado a matriz:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 0 & -a & 0 & a \\ a & 0 & a & 0 \\ 0 & -a & 0 & -a \\ -a & 0 & a & 0 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}$$

   (a) Por quais valores $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ é regular? Para estas valores, encontrar a inversa: $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1}$.

   (b) Por quais valores $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ é ortogonal, isto é: $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}^T$?

   (c) Encontrar a matriz adjunta: $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^*$.

   (d) Resolver a equação matricial: $\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\underline{\mathbf{X}}} = \underline{\underline{\mathbf{0}}}$, onde $\underline{\underline{\mathbf{0}}} \in M^{4,4}$.

2. *4 pts.* Dado os planos em $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{array}{lccccccc} (\alpha): & x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ (\beta): & 2x & - & y & + & (3a-4)z & = & 3 \\ (\gamma): & & & ay & - & z & = & 1 \end{array}$$

   (a) Para quais valores de $a \in \mathbb{R}$ os planos α, β e γ tem uma reta em comum?

   (b) Para quais valores de $a \in \mathbb{R}$ os planos α, β e γ tem um ponto em comum?

   (c) Para quais valores de $a \in \mathbb{R}$ os planos α, β e γ nenhum ponto em comum?

   (d) Para $a = 1$ encontrar a intersecção: $\alpha \cap \beta$.

   (e) Para $a = 1$ encontrar a intersecção: $\beta \cap \gamma$.

   (f) Para $a = 1$ encontrar a intersecção: $\gamma \cap \alpha$.

3. *2 pts.* Dado a matriz:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a^2 - a \\ a & a & 1 & a^3 - 2a^2 + a \\ -1 & 3a & 0 & 2a^2 - 2a \\ a & 2a & 1 & a^3 - a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}$$

   (a) Encontrar o posto $\rho_{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

   (b) Por todo $a \in \mathbb{R}$ resolver a equação matricial: $\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\underline{\mathbf{X}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}$.

Dr. Ole Peter Smith
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal de Goiás
ole@mat.ufg.br - http://www.ime.ufg.br/docentes/olepeter

Data:	06/04/2010
Semestre:	2010.1
Curso:	Engenharia de Alimentos
Disciplina:	Álgebra Linear
Prova:	I

1. *2 pts.* Calcular os determinantes:

   (a)
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

   (b)
$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

2. *3 pts.* Dado a matriz e os vetores:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{\mathbf{b}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{\mathbf{b}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Mostre que a matriz $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ é regular.
   (b) Resolver o sistema $\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}_1$.
   (c) Resolver o sistema $\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}_2$.

3. *2 pts.* Considerando a matriz:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Encontrar $\det \underline{\underline{\mathbf{A}}}$.
   (b) Encontrar a matriz inversa: $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1}$.
   (c) Encontrar a matriz adjunta: $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{*}$.

4. *3 pts.* Dado as matrizes:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{\mathbf{B}}} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -2 & -4 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   (a) Encontrar o posto da $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$.
   (b) Resolver o sistema matricial: $\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\underline{\mathbf{X}}} = \underline{\underline{\mathbf{B}}}$.
   (c) Indicar no item anterior a solução completa do sistema homogênea e uma solução particular do sistema não-homogênea.

Dr. Ole Peter Smith
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal de Goiás
ole@mat.ufg.br - http://www.ime.ufg.br/docentes/olepeter

Data:	14/05/2010
Semestre:	2010.1
Curso:	Engenharia de Alimentos
Disciplina:	Álgebra Linear
Prova:	II

1. *4 pts.* Dados os vetores em $\mathbb{R}^4$:

$$\underline{\mathbf{d}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{\mathbf{d}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{\mathbf{d}}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{\mathbf{d}}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \underline{\mathbf{d}}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Mostre que os vetores $\underline{\mathbf{d}}_1, \underline{\mathbf{d}}_2, \underline{\mathbf{d}}_3, \underline{\mathbf{d}}_4$ formam uma base em $\mathbb{R}^4$.

   (b) Encontre uma relação entre as coordenadas em relação a base canônica e a base $(\underline{\mathbf{d}}_1, \underline{\mathbf{d}}_2, \underline{\mathbf{d}}_3, \underline{\mathbf{d}}_4)$.

   (c) Encontre as coordenadas do vetor $\underline{\mathbf{d}}_5$ na base $(\underline{\mathbf{d}}_1, \underline{\mathbf{d}}_2, \underline{\mathbf{d}}_3, \underline{\mathbf{d}}_4)$.

   (d) Encontre as coordenadas antigas dos vetores básicos novos.

   (e) Encontre as coordenadas novas dos vetores básicos antigos.

2. *2 pts.* Uma aplicação linear, $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ é dado pela sua matriz:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Encontrar o núcleo e a sua dimensão.

   (b) Encontrar a dimensão e uma base da imagem, $f(\mathbb{R}^3)$.

   (c) Encontrar o conjunto: $\{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\underline{\mathbf{x}}) = (0, 1, 1)\}$.

   (d) f tem inversa?

3. *4 pts.* Dados os vetores em $\mathbb{R}^4$:

$$\underline{\mathbf{v}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \underline{\mathbf{v}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \underline{\mathbf{v}}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \underline{\mathbf{v}}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   e uma aplicação linear, $f : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^4$:

$$f(\underline{\mathbf{v}}_1) = \underline{\mathbf{v}}_1 + \underline{\mathbf{v}}_2, \quad f(\underline{\mathbf{v}}_2) = -\underline{\mathbf{v}}_1 + \underline{\mathbf{v}}_2, \quad f(\underline{\mathbf{v}}_3) = \underline{\mathbf{v}}_3 + \underline{\mathbf{v}}_4, \quad f(\underline{\mathbf{v}}_4) = -\underline{\mathbf{v}}_3 + \underline{\mathbf{v}}_4$$

   (a) Mostrar que os vetores $\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2, \underline{\mathbf{v}}_3, \underline{\mathbf{v}}_4$ formam uma base em $\mathbb{R}^4$.

   (b) Encontrar a matriz, $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, em relação a base canônica (no domínio e na imagem).

   (c) Encontrar a matriz, $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$, em relação da base $(\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2, \underline{\mathbf{v}}_3, \underline{\mathbf{v}}_4)$ (no domínio e na imagem).

   (d) Sendo $U = ger(\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2)$, mostre que $f(U) = U$.

   (e) Sendo $\underline{\underline{\mathbf{V}}}$ a matriz contendo os vetores $\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2, \underline{\mathbf{v}}_3, \underline{\mathbf{v}}_4$ em colunas, mostre: $\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{V}}}^{-1} \underline{\underline{\mathbf{A}}}\, \underline{\underline{\mathbf{V}}}$.

$\mu\alpha\tau\epsilon\mu\alpha\tau\iota\kappa\alpha$
Made in LaTeX

Dr. Ole Peter Smith
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal de Goiás
ole@mat.ufg.br - http://www.ime.ufg.br/docentes/olepeter

Data:	19/05/2010
Semestre:	2010.1
Curso:	Matemática
Disciplina:	Álgebra Linear
Prova:	II

1. *5 pts.* Uma aplicação linear, $f : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^4$ é dado por sua matriz::

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Considerando os vetores:

$$\underline{\mathbf{v}}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{\mathbf{v}}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \underline{\mathbf{v}}_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \underline{\mathbf{v}}_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Mostre que os vetores $\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2, \underline{\mathbf{v}}_3, \underline{\mathbf{v}}_4$ formam uma base em $\mathbb{R}^4$.

(b) Mostre que vale: $f(\underline{\mathbf{v}}_i) = \lambda_i \underline{\mathbf{v}}_i,\ \ i = 1, 2, 3, 4$. Encontre os λ_i's.

(c) Uma base, $\underline{\mathbf{v}}_i$, é chamado ortonormal, se:

$$\underline{\mathbf{v}}_i \cdot \underline{\mathbf{v}}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

Mostre que os $\underline{\mathbf{v}}_i$'s formam uma base ortonormal em $\mathbb{R}^4$.

(d) Organizando os vetores $\underline{\mathbf{v}}_i$ como colunas numa matriz, $\underline{\underline{\mathbf{V}}}$, mostre: $\underline{\underline{\mathbf{V}}}^{-1} = \underline{\underline{\mathbf{V}}}^T$.

(e) Encontre uma relação entre coordenadas em relação a base canônica e coordenadas em relação a base $\underline{\mathbf{v}}_i$.

(f) Mostre que $\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{V}}}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{A}}}\ \underline{\underline{\mathbf{V}}}$ é diagonal. Quais os valores na sua diagonal?

2. *3 pts.* Uma aplicação linear, $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ é dado pela sua matriz:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Encontrar o núcleo, $\ker f$, e a sua dimensão. Mostrar que $\underline{\mathbf{d}}_1 = \frac{1}{3}(-2, 2, 1)^T \in \ker f$.

(b) Encontrar a dimensão e uma base da imagem, $\mathrm{Im} f$.

(c) Mostrar que os vetores $\underline{\mathbf{d}}_2 = \frac{1}{3}(2, 1, 2)$ e $\underline{\mathbf{d}}_3 = \frac{1}{3}(1, 2, -2)$ formam uma base ortonormal da imagem.

(d) Mostrar que: $\ker f \perp \mathrm{Im} f$.

3. *2 pts.* Consideramos a aplicação e os vetores introduzidos no questão 2.

(a) Mostre que os vetores $\underline{\mathbf{d}}_1, \underline{\mathbf{d}}_2, \underline{\mathbf{d}}_3$ formam uma base ortonormal em $\mathbb{R}^3$.

(b) Encontrar as imagens: $f(\underline{\mathbf{d}}_i)$ em relação a base canônica.

(c) Encontrar as imagens: $f(\underline{\mathbf{d}}_i)$ em relação a base $\underline{\mathbf{d}}_i$.

(d) Encontrar a matriz do f usando a base $\underline{\mathbf{d}}_i$ no domínio e na imagem.

$\mu\alpha\tau\epsilon\mu\alpha\tau\iota\kappa\alpha$
Made in LaTeX

UFG

Dr. Ole Peter Smith
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal de Goiás
ole@mat.ufg.br - http://www.ime.ufg.br/docentes/olepeter

Data:	01/06/2010
Semestre:	2010.1
Curso:	Matemática
Disciplina:	Álgebra Linear
Prova:	II, 2^a chamada

1. *6 pts.*Dado os vetores:

$$\underline{\mathbf{v}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{\mathbf{v}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{\mathbf{v}}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{\mathbf{v}}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Mostre que os vetores $(\underline{\mathbf{v}}_i)$ formam uma base de $\mathbb{R}^4$.

   (b) Encontrar uma relação expressando as coordenadas em relação a base canônica, em termo das coordenadas em relação a base $(\underline{\mathbf{v}}_i)$.

   (c) Uma aplicação linear, $f : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^3$, é dado por:

$$f(\underline{\mathbf{v}}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad f(\underline{\mathbf{v}}_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad f(\underline{\mathbf{v}}_3) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad f(\underline{\mathbf{v}}_4) = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Encontrar o matriz, $\underline{\underline{\mathbf{A}}}'$, da f usando base canônica em $\mathbb{R}^3$ e base $(\underline{\mathbf{v}}_i)$ em $\mathbb{R}^4$.

   (d) Encontrar o matriz, $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, da f usando base canônica em $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^3$.

   (e) Encontrar a dimensão da imagem, $f(\mathbb{R}^4)$.

   (f) Dado os vetores: $\underline{\mathbf{d}}_1 = \underline{\mathbf{v}}_1 + \underline{\mathbf{v}}_2 - \underline{\mathbf{v}}_3$ e $\underline{\mathbf{d}}_2 = -\underline{\mathbf{v}}_1 + 2\underline{\mathbf{v}}_2 - \underline{\mathbf{v}}_4$. Mostre que $\underline{\mathbf{d}}_1$ e $\underline{\mathbf{d}}_2$ gera o núcleo da f.

   (g) Encontrar, em termos de $\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2, \underline{\mathbf{v}}_3, \underline{\mathbf{v}}_4$, todas as vetores que satisfaz: $f(\underline{\mathbf{x}}) = f(\underline{\mathbf{v}}_1)$.

2. *2 pts.* Sendo $\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2$ uma base em $\mathbb{C}^2$, uma aplicação linear, f, é dado por:

$$f(\underline{\mathbf{v}}_1) = \underline{\mathbf{v}}_1 + 2\underline{\mathbf{v}}_2 \quad f(\underline{\mathbf{v}}_2) = i\underline{\mathbf{v}}_1 + \underline{\mathbf{v}}_2$$

   (a) Encontrar a matriz, $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, da f em relação a base $\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2$.

   (b) Mostre que os vetores: $\underline{\mathbf{w}}_1 = \underline{\mathbf{v}}_1 + \underline{\mathbf{v}}_2$ e $\underline{\mathbf{w}}_2 = \underline{\mathbf{v}}_1 - \underline{\mathbf{v}}_2$ formam uma base de $\mathbb{C}^2$.

   (c) Encontrar a matriz, $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$, da f em relação a base $\underline{\mathbf{w}}_1, \underline{\mathbf{w}}_2$.

3. *2 pts.*Dado a matriz:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   (a) Encontrar as imagens dos vetores: $\underline{\mathbf{v}}_1 = (1, -1, 1)^T$ e $\underline{\mathbf{v}}_2 = (1, -2, 2)^T$.

   (b) Encontrar um vetor, $\underline{\mathbf{v}}_3$, tal que: $f(\underline{\mathbf{v}}_3) = \underline{\mathbf{v}}_2 + \underline{\mathbf{v}}_3$.

   (c) Encontrar a matriz da f em relação a base $\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2, \underline{\mathbf{v}}_3$.

Dr. Ole Peter Smith
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal de Goiás
ole@mat.ufg.br - http://www.ime.ufg.br/docentes/olepeter

Data:	24/06/2010
Semestre:	2010.1
Curso:	Engenharia de Alimentos
Disciplina:	Álgebra Linear
Prova:	III

1. *3 pts.* Dado a matriz:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

Onde $a \neq 0$.

(a) Encontrar os autovalores da $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$.

(b) Encontrar os autovetores da $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$.

(c) A matriz $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ é similar com uma matriz diagonal? Caso sim, qual?

(d) Os autovetores da $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ são ortogonais? Justifique!

2. *4 pts.* Uma aplicação linear, $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ é dado pela sua matriz:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -4 \\ -4 & 6 & -4 \\ -4 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

(a) Encontrar os autovalores e os autovetores da matriz $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$.

(b) Encontrar o núcleo da matriz $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$.

(c) Mostre que $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ é diagonalizável.

(d) Encontre uma matriz diagonal, $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$, e uma matriz ortogonal, $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$, tal que $\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{D}}}^{-1} \underline{\underline{\mathbf{A}}}\ \underline{\underline{\mathbf{D}}}$.

3. *3 pts.* Dado a forma quadrática:

$$F(x, y, z) = 6x^2 + 6y^2 + 6z^2 - 8xy - 8xz - 8yz$$

(a) Encontrar uma matriz *simétrica*, tal que: $F(x, y, z) = \underline{\mathbf{x}}^T \underline{\underline{\mathbf{A}}}\ \underline{\mathbf{x}}$.

(b) Encontrar uma base ortonormal de autovetores da matriz $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, e uma relação entre as coordenadas novas, (x', y', z'), e as coordenadas antigas, (x, y, z).

(c) Encontrar a matriz, $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$, neste base. Encontre também a forma quadrática transformada: $F'(x', y', z') = F(x, y, z)$.

(d) Classifique a superfície definida por: $F(x, y, z) = 4$, fornecendo tipo, centro e semi-eixo(s).

Superfícies quadráticas em $\mathbb{R}^3$:

I: Elipsóide, centro $C(x_0, y_0, z_0)$, semi-eixos a, b, c:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$$

II: Hiperbolóide 1 folha, centro $C(x_0, y_0, z_0)$, semi-eixos a, b, c:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$$

Eixo principal: $(x, y, z)^T = (x_0 + t, y_0 + t, z_0)^T, \ \ t \in \mathbb{R}$.

III: Hiperbolóide 2 folhas, centro $C(x_0, y_0, z_0)$, semi-eixos a, b, c:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$$

Eixo principal: $(x,y,z)^T=(x_0+t,y_0+t,z_0)^T,\ \ t\in\mathbb{R}.$

IV: Cone quadrático, centro (x_0,y_0,z_0), semi-eixos a,b,c:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=0$$

V: Parabolóide eliptica, centro (x_0,y_0,z_0), semi-eixos a,b:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=z-z_0$$

VI: Parabolóide hiperbólica (sela), centro (x_0,y_0,z_0), semi-eixos a,b:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=z-z_0$$

Data:	24/06/2010
Semestre:	2010.1
Curso:	Matemática
Disciplina:	Álgebra Linear
Prova:	III

1. *3 pts.* Dado a matriz:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

Onde $a \in \mathbb{R}$.

(a) Encontrar os autovalores da $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

(b) Encontrar os autovetores da $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

(c) A matriz $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ é similar com uma matriz diagonal? Caso sim, qual?

(d) Os autovetores da $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ são ortogonais? Justifique!

2. *4 pts.* Uma aplicação linear, $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ é dado pela sua matriz:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -4 \\ -4 & 3 & -4 \\ -4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Encontrar os autovalores e os autovetores da matriz $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$.

(b) Encontrar o núcleo da matriz $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$.

(c) Mostre que $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ é diagonalizável.

(d) Encontre uma matriz diagonal, $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$, e uma matriz ortogonal, $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$, tal que $\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{D}}}^{-1} \underline{\underline{\mathbf{A}}}\, \underline{\underline{\mathbf{D}}}$.

3. *3 pts.* Dado a forma quadrática:

$$F(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 8xy - 8xz - 8yz$$

(a) Encontrar uma matriz *simétrica*, tal que: $F(x, y, z) = \underline{\mathbf{x}}^T \underline{\underline{\mathbf{A}}}\, \underline{\mathbf{x}}$.

(b) Encontrar uma base ortonormal de autovetores da matriz $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, e uma relação entre as coordenadas novas, (x', y', z'), e as coordenadas antigas, (x, y, z).

(c) Encontrar a matriz, $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$, neste base. Encontre também a forma quadrática transformada: $F'(x', y', z') = F(x, y, z)$.

(d) Classifique a superfície definida por: $F(x, y, z) = 4$, fornecendo tipo, centro e semi-eixo(s).

Superfícies quadráticas em $\mathbb{R}^3$:

I: Elipsóide, centro $C(x_0, y_0, z_0)$, semi-eixos a, b, c:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1$$

II: Hiperbolóide 1 folha, centro $C(x_0, y_0, z_0)$, semi-eixos a, b, c:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1$$

Eixo principal: $(x, y, z)^T = (x_0 + t, y_0 + t, z_0)^T, \ \ t \in \mathbb{R}$.

III: Hiperbolóide 2 folhas, centro $C(x_0, y_0, z_0)$, semi-eixos a, b, c:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1$$

Eixo principal: $(x,y,z)^T=(x_0+t,y_0+t,z_0)^T,\ \ t\in\mathbb{R}$.

IV: Cone quadrático, centro (x_0,y_0,z_0), semi-eixos a,b,c:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=0$$

V: Parabolóide eliptica, centro (x_0,y_0,z_0), semi-eixos a,b:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=z-z_0$$

VI: Parabolóide hiperbólica (sela), centro (x_0,y_0,z_0), semi-eixos a,b:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=z-z_0$$

Dr. Ole Peter Smith
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal de Goiás
ole@mat.ufg.br - http://www.ime.ufg.br/docentes/olepeter

Data:	29/06/2010
Semestre:	2010.1
Curso:	Engenharia de Alimentos
Disciplina:	Álgebra Linear
Prova:	IV (Substituitiva)

1. *3 pts.* Dado a matriz:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

   (a) Encontrar os autovalores e os autovetores da $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ por qualquer valor do constante $a \in \mathbb{R}$.

   (b) Os autovetores da $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ são ortogonais? Justifique!

   (c) Por quais valores do $a \in \mathbb{R}$ $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ é diagonaliável? Por estes valores, encontrar uma matriz regular, $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$, e uma matriz diagonal, $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$, tal que $\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{D}}}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\underline{\mathbf{D}}}$.

2. *4 pts.* Uma aplicação linear, $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ é dado pela sua matriz:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

   (a) Encontrar os autovalores e os autovetores da matriz $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$.

   (b) Encontrar o núcleo da matriz $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$.

   (c) Mostre que $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ é diagonalizável.

   (d) Encontre uma matriz diagonal, $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$, e uma matriz ortogonal, $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$, tal que $\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{D}}}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\underline{\mathbf{D}}}$.

3. *3 pts.* Dado a forma quadrática:

$$F(x, y, z) = -x^2 - y^2 - z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$$

   (a) Encontrar uma matriz *simétrica*, tal que: $F(x, y, z) = \underline{\mathbf{x}}^T\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\mathbf{x}}$.

   (b) Encontrar uma base ortonormal de autovetores da matriz $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, e uma relação entre as coordenadas novas, (x', y', z'), e as coordenadas antigas, (x, y, z).

   (c) Encontrar a matriz, $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$, neste base. Encontre também a forma quadrática transformada: $F'(x', y', z') = F(x, y, z)$.

   (d) Classifique a superfície definida por: $F(x, y, z) = 2$, encontrando tipo, centro e semi-eixo(s) na base canônica.

Superfícies quadráticas em $\mathbb{R}^3$:

I: Elipsóide, centro $C(x_0, y_0, z_0)$, semi-eixos a, b, c:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1$$

II: Hiperbolóide 1 folha, centro $C(x_0, y_0, z_0)$, semi-eixos a, b, c:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1$$

Eixo principal: $(x, y, z)^T = (x_0 + t, y_0 + t, z_0)^T, \ \ t \in \mathbb{R}$.

III: Hiperbolóide 2 folhas, centro $C(x_0, y_0, z_0)$, semi-eixos a, b, c:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1$$

Eixo principal: $(x, y, z)^T = (x_0 + t, y_0 + t, z_0)^T, \;\; t \in \mathbb{R}$.
IV: Cone quadrático, centro (x_0, y_0, z_0), semi-eixos a, b, c:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 0$$

V: Parabolóide eliptica, centro (x_0, y_0, z_0), semi-eixos a, b:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = z - z_0$$

VI: Parabolóide hiperbólica (sela), centro (x_0, y_0, z_0), semi-eixos a, b:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = z - z_0$$

Dr. Ole Peter Smith
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal de Goiás
ole@mat.ufg.br - http://www.ime.ufg.br/docentes/olepeter

Data:	29/06/2010
Semestre:	2010.1
Curso:	Matemática
Disciplina:	Álgebra Linear
Prova:	IV (Substituitiva)

1. *3 pts.* Dado a matriz:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} a & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   (a) Encontrar os autovalores e os autovetores da $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ por qualquer valor do constante $a \in \mathbb{R}$.

   (b) Os autovetores da $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ são ortogonais? Justifique!

   (c) Por quais valores do $a \in \mathbb{R}$ $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ é diagonaliável? Por estes valores, encontrar uma matriz regular, $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$, e uma matriz diagonal, $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$, tal que $\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{D}}}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\underline{\mathbf{D}}}$.

2. *4 pts.* Uma aplicação linear, $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ é dado pela sua matriz:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

   (a) Encontrar os autovalores e os autovetores da matriz $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$.

   (b) Encontrar o núcleo da matriz $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$.

   (c) Mostre que $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ é diagonalizável.

   (d) Encontre uma matriz diagonal, $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$, e uma matriz ortogonal, $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$, tal que $\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{D}}}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\underline{\mathbf{D}}}$.

3. *3 pts.* Dado a forma quadrática:

$$F(x, y, z) = -2x^2 - 2y^2 - 2z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$$

   (a) Encontrar uma matriz *simétrica*, tal que: $F(x, y, z) = \underline{\mathbf{x}}^T\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\mathbf{x}}$.

   (b) Encontrar uma base ortonormal de autovetores da matriz $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, e uma relação entre as coordenadas novas, (x', y', z'), e as coordenadas antigas, (x, y, z).

   (c) Encontrar a matriz, $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$, neste base. Encontre também a forma quadrática transformada: $F'(x', y', z') = F(x, y, z)$.

   (d) Classifique a superfície definida por: $F(x, y, z) = -3$, encontrando tipo, centro (se tiver) e semi-eixo(s) na base canônica.

Superfícies quadráticas em $\mathbb{R}^3$:

I: Elipsóide, centro $C(x_0, y_0, z_0)$, semi-eixos a, b, c:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$$

II: Hiperbolóide 1 folha, centro $C(x_0, y_0, z_0)$, semi-eixos a, b, c:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$$

Eixo principal: $(x, y, z)^T = (x_0 + t, y_0 + t, z_0)^T, \ \ t \in \mathbb{R}$.

III: Hiperbolóide 2 folhas, centro $C(x_0, y_0, z_0)$, semi-eixos a, b, c:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$$

$\mu\alpha\tau\epsilon\mu\alpha\tau\iota\kappa\alpha$
Made in LaTeX

Eixo principal: $(x, y, z)^T = (x_0 + t, y_0 + t, z_0)^T, \ \ t \in \mathbb{R}$.

IV: Cone quadrático, centro (x_0, y_0, z_0), semi-eixos a, b, c:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 0$$

V: Parabolóide eliptica, centro (x_0, y_0, z_0), semi-eixos a, b:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = z - z_0$$

VI: Parabolóide hiperbólica (sela), centro (x_0, y_0, z_0), semi-eixos a, b:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = z - z_0$$

Dr. Ole Peter Smith
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal de Goiás
ole@mat.ufg.br - http://www.ime.ufg.br/docentes/olepeter

OBS! Respondendo a prova à lapis, perde-se o direito de revisão da prova. **OBS!**