Dr. Ole Peter Smith

Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal de Goiás
ole@mat.ufg.br

Data:	23/03/2010
Semestre:	2010.1
Curso:	Matemática
Disciplina:	Álgebra Linear
Prova:	I

1. *2 pts.* Dado a matriz:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ -a & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}$$

   (a) Encontrar o posto do $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

   (b) Resolver a equação: $\underline{\underline{\mathbf{A}}}\ \underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

   (c) Resolver a equaç ão: $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^T\ \underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$ para todo $b \in \mathbb{R}$.

   (d) Identifique a solução completa do sistema homogênea (SCSH) e uma solução particular do sistema não homogênea (SPSñH) no item anteriror.

2. *2 pts.* Com o matriz no item anterior pomos:

$$\underline{\underline{\mathbf{B}}}_1 = \underline{\underline{\mathbf{A}}}^T \underline{\underline{\mathbf{A}}} \qquad \underline{\underline{\mathbf{B}}}_2 = \underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\underline{\mathbf{A}}}^T$$

   (a) Calcular $\underline{\underline{\mathbf{B}}}_1$ e $\underline{\underline{\mathbf{B}}}_2$.

   (b) Calcular os determiantes $\det \underline{\underline{\mathbf{B}}}_1$ e $\det \underline{\underline{\mathbf{B}}}_2$.

   (c) Calcular as adjuntas $\underline{\underline{\mathbf{B}}}_1^*$ e $\underline{\underline{\mathbf{B}}}_2^*$.

   (d) Justifique que o produto de uma matriz com sua transposta é uma matriz simétrica.

3. *3 pts.*

   (a) Mostre que o determinante de ordem $n > 1$:

$$A_n = \begin{vmatrix} b & a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & & \ddots & & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & b & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & b & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix}$$

   satisfaz a fórmula de recursão: $A_n = bA_{n-1} - a^2 A_{n-2}, \quad n \geq 3$.

   (b) Pondo $A_1 = b$, encontrar A_3.

   (c) Encontrar a determinante:

$$A = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

Gosto tanto do seu Cristo
Mas tão pouco dos seus Cristões
Por que seus Cristões não podem ser mais como seu Cristo?
Mahatma Gandhi

4. *3 pts.* Dado a matriz:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & 0 & 1 \\ 2\alpha & 2\alpha & \alpha & 1 \\ 2\alpha & 3\alpha & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

   (a) Encontrar o posto do $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ por todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (b) Por quais valores $\alpha \in \mathbb{R}$ $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ é regular? Por estes valores, encontrar a inversa.

   (c) Resolver a sistema:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$$

   para todos $\alpha, a, b \in \mathbb{R}$.

Gosto tanto do seu Cristo
Mas tão pouco dos seus Cristões
Por que seus Cristões não podem ser mais como seu Cristo?
Mahatma Gandhi