Dr. Ole Peter Smith

Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal de Goiás
ole@mat.ufg.br - http://www.ime.ufg.br/docentes/olepeter

Data:	24/06/2010
Curso:	Matemática
Disciplina:	Álgebra Linear
Prova:	III

1. *3 pts.* Dado a matriz:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

Onde $a \in \mathbb{R}$.

(a) Encontrar os autovalores da $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

(b) Encontrar os autovetores da $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

(c) A matriz $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ é similar com uma matriz diagonal? Caso sim, qual?

(d) Os autovetores da $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ são ortogonais? Justifique!

2. *4 pts.* Uma aplicação linear, $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ é dado pela sua matriz:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -4 \\ -4 & 3 & -4 \\ -4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Encontrar os autovalores e os autovetores da matriz $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$.

(b) Encontrar o núcleo da matriz $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$.

(c) Mostre que $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ é diagonalizável.

(d) Encontre uma matriz diagonal, $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$, e uma matriz ortogonal, $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$, tal que $\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{D}}}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{A}}}\ \underline{\underline{\mathbf{D}}}$.

3. *3 pts.* Dado a forma quadrática:

$$F(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 8xy - 8xz - 8yz$$

(a) Encontrar uma matriz *simétrica*, tal que: $F(x, y, z) = \underline{\mathbf{x}}^T \underline{\underline{\mathbf{A}}}\ \underline{\mathbf{x}}$.

(b) Encontrar uma base ortonormal de autovetores da matriz $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, e uma relação entre as coordenadas novas, (x', y', z'), e as coordenadas antigas, (x, y, z).

(c) Encontrar a matriz, $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$, neste base. Encontre também a forma quadrática transmformada: $F'(x', y', z') = F(x, y, z)$.

(d) Classifique a superfície definida por: $F(x, y, z) = 4$, fornecendo tipo, centro e semi-eixo(s).

Superfícies quadráticas em $\mathbb{R}^3$:

I: Elipsóide, centro $C(x_0, y_0, z_0)$, semi-eixos a, b, c:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1$$

II: Hiperbolóide 1 folha, centro $C(x_0, y_0, z_0)$, semi-eixos a, b, c:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1$$

Eixo principal: $(x, y, z)^T = (x_0 + t, y_0 + t, z_0)^T, \ \ t \in \mathbb{R}$.

III: Hiperbolóide 2 folhas, centro $C(x_0, y_0, z_0)$, semi-eixos a, b, c:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1$$

Eixo principal: $(x,y,z)^T=(x_0+t,y_0+t,z_0)^T,\ \ t\in\mathbb{R}$.

IV: Cone quadrático, centro (x_0,y_0,z_0), semi-eixos a,b,c:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=0$$

V: Parabolóide eliptica, centro (x_0,y_0,z_0), semi-eixos a,b:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=z-z_0$$

VI: Parabolóide hiperbólica (sela), centro (x_0,y_0,z_0), semi-eixos a,b:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=z-z_0$$

OBS! Respondendo a prova à lapis, perde-se o direito de revisão da prova. **OBS!**