Dr. Ole Peter Smith
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal de Goiás
ole@mat.ufg.br - http://www.ime.ufg.br/docentes/olepeter

Data: 24/06/2010
Curso: Matemática
Disciplina: Álgebra Linear
Prova: III

1. *3 pts.* Dado a matriz:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

Onde $a \in \mathbb{R}$.

(a) Encontrar os autovalores da $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

(b) Encontrar os autovetores da $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

(c) A matriz $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ é similar com uma matriz diagonal? Caso sim, qual?

(d) Os autovetores da $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ são ortogonais? Justifique!

Solution:

(a) Ressaltamos que $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ é simétrica: $\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}^T$. Calculando:

$$P_2(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & a \\ a & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - a^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \pm a$$

(b)

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} - (1 \pm a)\underline{\underline{\mathbf{I}}} = \begin{pmatrix} 1-(1\pm a) & a \\ a & 1-(1\pm a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mp a & a \\ a & \mp a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mp 1 & 1 \\ 1 & \mp 1 \end{pmatrix} \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}} \Leftrightarrow$$
$$x_1 = \pm x_t \Leftrightarrow x_2 = t \wedge x_1 = \pm t, \quad t \in \mathbb{R}$$

Juntando:

$$\lambda_1 = 1 + a : \underline{\mathbf{v}}_1 = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda_2 = 1 - a : \underline{\mathbf{v}}_2 = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Normalizando:

$$\lambda_1 = 1 + a : \underline{\mathbf{d}}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda_2 = 1 - a : \underline{\mathbf{d}}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c) Por $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ ser simétrica, ela é digaonalizável, ou seja similar de uma matriz diagonal, $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$. Usando a substituição ortogonal, $\underline{\underline{\mathbf{D}}}^{-1} = \underline{\underline{\mathbf{D}}}^T$:

$$\underline{\underline{\mathbf{D}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Temos:

$$\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{D}}}^T \underline{\underline{\mathbf{A}}}\, \underline{\underline{\mathbf{D}}} = \begin{pmatrix} 1+a & 0 \\ 0 & 1-a \end{pmatrix}$$

(d) De novo, pelo fator $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ ser simétrica, seus dois autovetores são ortogonais. Inspecionando:

$$\underline{\mathbf{v}}_1 \cdot \underline{\mathbf{v}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

2. *4 pts.* Uma aplicação linear, $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ é dado pela sua matriz:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -4 \\ -4 & 3 & -4 \\ -4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Encontrar os autovalores e os autovetores da matriz $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$.

(b) Encontrar o núcleo da matriz $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$.

(c) Mostre que $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ é diagonalizável.

(d) Encontre uma matriz diagonal, $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$, e uma matriz ortogonal, $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$, tal que $\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{D}}}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\underline{\mathbf{D}}}$.

Solution:

Ressaltamos que a matrix é simétrica, e assim tem 3 raízes reais (contados com multiplicidade)

(a)

$$\det(\underline{\underline{\mathbf{A}}} - \lambda\underline{\underline{\mathbf{I}}}) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 & -4 \\ -4 & 3-\lambda & -4 \\ -4 & -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5-\lambda & -2-\lambda & -2-\lambda \\ -4 & 3-\lambda & -4 \\ -4 & -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -(5+\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -4 & 3-\lambda & -4 \\ -4 & -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$-(5+\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 7-\lambda & 0 \\ -4 & 0 & 7-\lambda \end{vmatrix} = -(5+\lambda)(7-\lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -5 \vee \lambda_2 = \lambda_3 = 7$$

$\underline{\lambda_1 = 7}$:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} - 7\underline{\underline{\mathbf{I}}} = \begin{pmatrix} -4 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}} \Leftrightarrow$$

$$x_1 = t \wedge x_2 = s \wedge x_3 = -t-s \Leftrightarrow \underline{\mathbf{x}} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t,s \in \mathbb{R}$$

$\underline{\lambda_1 = -5}$:

O autovetor de $\lambda_1 = -2$ é ortogonal a ambos os autovetores de $\lambda_1 = 10$, ou seja paralela com o produto vetorial entre os dois:

$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{vmatrix} \underline{\mathbf{i}} & \underline{\mathbf{j}} & \underline{\mathbf{k}} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

(b) O núcleo é o auto-espaço de autovalor $\lambda = 0$. Por $\lambda = 0$ não ser autovalor: $\ker f = \{\underline{\mathbf{0}}\}$.

(c) Por $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ ser simétrica ela é diagonalizável.

(d) Escolhemos como o primeiro vetor básico o autovetor de $\lambda = -5$, $\underline{\mathbf{v}}_1 = (1,1,1)$, e como o segundo vetor básico um dos autovetos de $\lambda = 7$, por exemplo: $\underline{\mathbf{v}}_2 = (1,0,-1)$. Notamos que $\underline{\mathbf{v}}_1 \perp \underline{\mathbf{v}}_2$ (pois são autovetores de autovalores diferentes), porém $\underline{\mathbf{v}}_2$ não é ortogonal ao $(1,-1,0)$. Escolhemos: $\underline{\mathbf{v}}_3 = (1,1,-2)$, pois este é ortogonal em $\underline{\mathbf{v}}_1$ e , $\underline{\mathbf{v}}_2$. Por , $\underline{\mathbf{v}}_3$ ser ortogonal em $\underline{\mathbf{v}}_1$, concluimos que é autovetor do raíz dupla, $\lambda = 7$, o que também pode-se verificar diretamente. Normalizando obtemos uma base ortonormal:

$$\underline{\mathbf{d}}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{\mathbf{d}}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{\mathbf{d}}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Organizando estes vetores ortonormais erm colunas, obtemos uma matriz ortogonal, $\underline{\underline{\mathbf{D}}}^{-1} = \underline{\underline{\mathbf{D}}}^T$:

$$\underline{\underline{\mathbf{D}}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Sendo uma base de autovetores, a matriz do f neste base é diagonal:

$$\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

E: $\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{D}}}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\underline{\mathbf{D}}} = \underline{\underline{\mathbf{D}}}^T\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\underline{\mathbf{D}}}$.

3. *3 pts.* Dado a forma quadrática:

$$F(x,y,z) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 8xy - 8xz - 8yz$$

(a) Encontrar uma matriz *simétrica*, tal que: $F(x,y,z) = \underline{\mathbf{x}}^T \underline{\underline{\mathbf{A}}}\, \underline{\mathbf{x}}$.

(b) Encontrar uma base ortonormal de autovetores da matriz $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, e uma relação entre as coordenadas novas, (x', y', z'), e as coordenadas antigas, (x, y, z).

(c) Encontrar a matriz, $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$, neste base. Encontre também a forma quadrática transmformada: $F'(x', y', z') = F(x, y, z)$.

(d) Classifique a superfície definida por: $F(x,y,z) = 4$, fornecendo tipo, centro e semi-eixo(s).

Superfícies quadráticas em $\mathbb{R}^3$:

I: Elipsóide, centro $C(x_0, y_0, z_0)$, semi-eixos a, b, c:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1$$

II: Hiperbolóide 1 folha, centro $C(x_0, y_0, z_0)$, semi-eixos a, b, c:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1$$

Eixo principal: $(x,y,z)^T = (x_0 + t, y_0 + t, z_0)^T, \;\; t \in \mathbb{R}$.

III: Hiperbolóide 2 folhas, centro $C(x_0, y_0, z_0)$, semi-eixos a, b, c:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1$$

Eixo principal: $(x,y,z)^T = (x_0 + t, y_0 + t, z_0)^T, \;\; t \in \mathbb{R}$.

IV: Cone quadrático, centro (x_0, y_0, z_0), semi-eixos a, b, c:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 0$$

V: Parabolóide eliptica, centro (x_0, y_0, z_0), semi-eixos a, b:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = z - z_0$$

VI: Parabolóide hiperbólica (sela), centro (x_0, y_0, z_0), semi-eixos a, b:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = z - z_0$$

Solution:

(a) Vemos:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -4 \\ -4 & 3 & -4 \\ -4 & -4 & 3 \end{pmatrix},$$

e observamos que isto é a matriz $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ do exercício anterior; utilizaremos os resultados ali obtidos.

(b) Usando os resultados do exercício anterior:

$$\underline{\underline{\mathbf{D}}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

A matriz $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$ transforma coordenadas novas em coordenadas antigas:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\underline{\mathbf{D}}} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'\frac{1}{\sqrt{3}} + y'\frac{1}{\sqrt{2}} + z'\frac{1}{\sqrt{6}} \\ x'\frac{1}{\sqrt{3}} - y'\frac{1}{\sqrt{2}} + z'\frac{1}{\sqrt{6}} \\ x'\frac{1}{\sqrt{3}} - 2z'\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underline{\underline{\mathbf{D}}}^T \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\frac{1}{\sqrt{3}} + y\frac{1}{\sqrt{3}} + z\frac{1}{\sqrt{3}} \\ x\frac{1}{\sqrt{2}} - y\frac{1}{\sqrt{2}} \\ x\frac{1}{\sqrt{6}} + y\frac{2}{\sqrt{6}} - 2z\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

(c) De novo, usando os resultados do exercício anterior:

$$\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

E:

$$F'(x', y', z') = -5x'^2 + 7y'^2 + 7z'^2$$

(d) Em termos de x', y', z' a superfície: $F(x, y, z) = 4$, tranforma em:

$$-5x'^2 + 7y'^2 + 7z'^2 = 4 \Leftrightarrow -\left(\frac{x'}{\sqrt{\frac{4}{5}}}\right)^2 + -\left(\frac{y'}{\sqrt{\frac{4}{7}}}\right)^2 - \left(\frac{z'}{\sqrt{\frac{4}{7}}}\right)^2 = 1$$

No plano $y'z'$ ($x' = 0$), temos circumferências, nos planos $x'y'$ ($z' = 0$) respectivamente $x'z'$ ($y' = 0$), hipérboles, e a superfície é uma hiperboloide de uma folha (de revolução). Semieixos: $\sqrt{\frac{4}{5}}$, $\sqrt{\frac{4}{7}}$ e $\sqrt{\frac{4}{7}}$. O eixo de revolução é o eixo x', paralelo com o vetor $\underline{\mathbf{v}}_1 = (1, 1, 1)$.

OBS! Respondendo a prova à lapis, perde-se o direito de revisão da prova. **OBS!**