



Data: 24/06/2010
Curso: Engenharia de Alimentos
Disciplina: Álgebra Linear
Prova: III

1. 3 pts. Dado a matriz:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

Onde $a \neq 0$.

- Encontrar os autovalores da $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$.
- Encontrar os autovetores da $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$.
- A matriz $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ é similar com uma matriz diagonal? Caso sim, qual?
- Os autovetores da $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ são ortogonais? Justifique!

2. 4 pts. Uma aplicação linear, $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ é dado pela sua matriz:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -4 \\ -4 & 6 & -4 \\ -4 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

- Encontrar os autovalores e os autovetores da matriz $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$.
- Encontrar o núcleo da matriz $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$.
- Mostre que $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ é diagonalizável.
- Encontre uma matriz diagonal, $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$, e uma matriz ortogonal, $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$, tal que $\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{D}}}^{-1} \underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\underline{\mathbf{D}}}$.

3. 3 pts. Dado a forma quadrática:

$$F(x, y, z) = 6x^2 + 6y^2 + 6z^2 - 8xy - 8xz - 8yz$$

- Encontrar uma matriz *simétrica*, tal que: $F(x, y, z) = \mathbf{x}^T \underline{\underline{\mathbf{A}}} \mathbf{x}$.
- Encontrar uma base ortonormal de autovetores da matriz $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, e uma relação entre as coordenadas novas, (x', y', z') , e as coordenadas antigas, (x, y, z) .
- Encontrar a matriz, $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$, neste base. Encontre também a forma quadrática transformada: $F'(x', y', z') = F(x, y, z)$.
- Classifique a superfície definida por: $F(x, y, z) = 4$, fornecendo tipo, centro e semi-eixo(s).

Superfícies quadráticas em \mathbb{R}^3 :

I: Elipsóide, centro $C(x_0, y_0, z_0)$, semi-eixos a, b, c :

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$$

II: Hiperbolóide 1 folha, centro $C(x_0, y_0, z_0)$, semi-eixos a, b, c :

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$$

Eixo principal: $(x, y, z)^T = (x_0 + t, y_0 + t, z_0)^T$, $t \in \mathbb{R}$.

III: Hiperbolóide 2 folhas, centro $C(x_0, y_0, z_0)$, semi-eixos a, b, c :

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$$



Eixo principal: $(x, y, z)^T = (x_0 + t, y_0 + t, z_0)^T$, $t \in \mathbb{R}$.

IV: Cone quadrático, centro (x_0, y_0, z_0) , semi-eixos a, b, c :

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 0$$

V: Parabolóide elíptica, centro (x_0, y_0, z_0) , semi-eixos a, b :

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = z - z_0$$

VI: Parabolóide hiperbólica (sela), centro (x_0, y_0, z_0) , semi-eixos a, b :

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = z - z_0$$

OBS! Respondendo a prova à lapis, perde-se o direito de revisão da prova. **OBS!**