Dr. Ole Peter Smith

Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal de Goiás
ole@mat.ufg.br - http://www.ime.ufg.br/docentes/olepeter

Data:	19/05/2010
Semestre:	2010.1
Curso:	Matemática
Disciplina:	Álgebra Linear
Prova:	II

1. *5 pts.* Uma aplicação linear, $f : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^4$ é dado por sua matriz::

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Considerando os vetores:

$$\underline{\mathbf{v}}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{\mathbf{v}}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \underline{\mathbf{v}}_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \underline{\mathbf{v}}_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Mostre que os vetores $\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2, \underline{\mathbf{v}}_3, \underline{\mathbf{v}}_4$ formam uma base em $\mathbb{R}^4$.

   (b) Mostre que vale: $f(\underline{\mathbf{v}}_i) = \lambda_i \underline{\mathbf{v}}_i, \ \ i = 1, 2, 3, 4$. Encontre os λ_i's.

   (c) Uma base, $\underline{\mathbf{v}}_i$, é chamado ortonormal, se:

$$\underline{\mathbf{v}}_i \cdot \underline{\mathbf{v}}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

   Mostre que os $\underline{\mathbf{v}}_i$'s formam uma base ortonormal em $\mathbb{R}^4$.

   (d) Organizando os vetores $\underline{\mathbf{v}}_i$ como colunas numa matriz, $\underline{\underline{\mathbf{V}}}$, mostre: $\underline{\underline{\mathbf{V}}}^{-1} = \underline{\underline{\mathbf{V}}}^T$.

   (e) Encontre uma relação entre coordenadas em relação a base canônica e coordenadas em relação a base $\underline{\mathbf{v}}_i$.

   (f) Mostre que $\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{V}}}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{A}}}\ \underline{\underline{\mathbf{V}}}$ é diagonal. Quais os valores na sua diagonal?

2. *3 pts.* Uma aplicação linear, $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ é dado pela sua matriz:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Encontrar o núcleo, $\ker f$, e a sua dimensão. Mostrar que $\underline{\mathbf{d}}_1 = \frac{1}{3}(-2, 2, 1)^T \in \ker f$.

   (b) Encontrar a dimensão e uma base da imagem, $\mathrm{Im} f$.

   (c) Mostrar que os vetores $\underline{\mathbf{d}}_2 = \frac{1}{3}(2, 1, 2)$ e $\underline{\mathbf{d}}_3 = \frac{1}{3}(1, 2, -2)$ formam uma base ortonormal da imagem.

   (d) Mostrar que: $\ker f \perp \mathrm{Im} f$.

3. *2 pts.* Consideramos a aplicação e os vetores introduzidos no questão 2.

   (a) Mostre que os vetores $\underline{\mathbf{d}}_1, \underline{\mathbf{d}}_2, \underline{\mathbf{d}}_3$ formam uma base ortonormal em $\mathbb{R}^3$.

   (b) Encontrar as imagens: $f(\underline{\mathbf{d}}_i)$ em relação a base canônica.

   (c) Encontrar as imagens: $f(\underline{\mathbf{d}}_i)$ em relação a base $\underline{\mathbf{d}}_i$.

   (d) Encontrar a matriz do f usando a base $\underline{\mathbf{d}}_i$ no domínio e na imagem.

OBS! Respondendo a prova à lapis, perde-se o direito de revisão da prova. **OBS!**