Dr. Ole Peter Smith

Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal de Goiás
ole@mat.ufg.br - http://www.ime.ufg.br/docentes/olepeter

Data:	19/05/2010
Semestre:	2010.1
Curso:	Matemática
Disciplina:	Álgebra Linear
Prova:	II

1. *5 pts.* Uma aplicação linear, $f : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^4$ é dado por sua matriz::

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Considerando os vetores:

$$\underline{\mathbf{v}}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{\mathbf{v}}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \underline{\mathbf{v}}_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \underline{\mathbf{v}}_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Mostre que os vetores $\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2, \underline{\mathbf{v}}_3, \underline{\mathbf{v}}_4$ formam uma base em $\mathbb{R}^4$.

(b) Mostre que vale: $f(\underline{\mathbf{v}}_i) = \lambda_i \underline{\mathbf{v}}_i, \quad i = 1, 2, 3, 4$. Encontre os λ_i's.

(c) Uma base, $\underline{\mathbf{v}}_i$, é chamado ortonormal, se:

$$\underline{\mathbf{v}}_i \cdot \underline{\mathbf{v}}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

Mostre que os $\underline{\mathbf{v}}_i$'s formam uma base ortonormal em $\mathbb{R}^4$.

(d) Organizando os vetores $\underline{\mathbf{v}}_i$ como colunas numa matriz, $\underline{\underline{\mathbf{V}}}$, mostre: $\underline{\underline{\mathbf{V}}}^{-1} = \underline{\underline{\mathbf{V}}}^T$.

(e) Encontre uma relação entre coordenadas em relação a base canônica e coordenadas em relação a base $\underline{\mathbf{v}}_i$.

(f) Mostre que $\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{V}}}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\underline{\mathbf{V}}}$ é diagonal. Quais os valores na sua diagonal?

Solution:

(a)

$$\underline{\underline{\mathbf{V}}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Da redução segue, que $\rho_{\underline{\underline{\mathbf{V}}}} = 4$, ou seja os $\underline{\mathbf{v}}_i$'s formam uma base.

(b)

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\mathbf{v}}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\underline{\mathbf{v}}_1 \Rightarrow \lambda_1 = 0$$

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\mathbf{v}}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2\,\underline{\mathbf{v}}_2 \Rightarrow \lambda_2 = 2$$

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\mathbf{v}}_3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&-1&0&-1\\-1&2&-1&0\\0&-1&2&-1\\-1&0&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4\\-4\\4\\-4\end{pmatrix}=4\,\underline{\mathbf{v}}_3\Rightarrow\lambda_3=4$$

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\mathbf{v}}_4=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&-1&0&-1\\-1&2&-1&0\\0&-1&2&-1\\-1&0&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\-2\\2\\-2\end{pmatrix}=2\,\underline{\mathbf{v}}_4\Rightarrow\lambda_4=2$$

Comentário: Dizemos que os vetores $\underline{\mathbf{v}}_i$ são *autovetores* da matriz $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ de *autovalor* λ_i.

(c) Verifica-se:

$$\underline{\mathbf{v}}_1\cdot\underline{\mathbf{v}}_1=\underline{\mathbf{v}}_2\cdot\underline{\mathbf{v}}_2=\underline{\mathbf{v}}_3\cdot\underline{\mathbf{v}}_3=\underline{\mathbf{v}}_4\cdot\underline{\mathbf{v}}_4=1$$

E:

$$\underline{\mathbf{v}}_1\cdot\underline{\mathbf{v}}_2=\underline{\mathbf{v}}_1\cdot\underline{\mathbf{v}}_3=\underline{\mathbf{v}}_1\cdot\underline{\mathbf{v}}_4=\underline{\mathbf{v}}_2\cdot\underline{\mathbf{v}}_3=\underline{\mathbf{v}}_2\cdot\underline{\mathbf{v}}_4=\underline{\mathbf{v}}_3\cdot\underline{\mathbf{v}}_4=0$$

Assim os $\underline{\mathbf{v}}_i$'s formam uma base ortonormal em $\mathbb{R}^4$.

(d) Por $\underline{\underline{\mathbf{V}}}$ ser regular, possui inversa - e a inversa é *única*. Formando a transposta:

$$\underline{\underline{\mathbf{V}}}^T=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}$$

Multiplicando esta com $\underline{\underline{\mathbf{V}}}$:

$$\underline{\underline{\mathbf{V}}}^T\underline{\underline{\mathbf{V}}}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{1}&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&4&0\\0&0&0&4\end{pmatrix}=\underline{\underline{\mathbf{I}}}\Leftrightarrow\underline{\underline{\mathbf{V}}}^{-1}=\underline{\underline{\mathbf{V}}}^T$$

Concluimos que $\underline{\underline{\mathbf{V}}}^T$ é *a* inversa da $\underline{\underline{\mathbf{V}}}$.

(e)

$$\underline{\mathbf{x}}_{antiga}=\underline{\underline{\mathbf{V}}}\,\underline{\mathbf{x}}_{nova}\Leftrightarrow\underline{\mathbf{x}}_{nova}=\underline{\underline{\mathbf{V}}}^T\underline{\mathbf{x}}_{antiga}$$

(f) Usando os resultados em item b, temos:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\mathbf{v}}_i=\lambda_i\underline{\mathbf{v}}_i$$

Ou:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\underline{\mathbf{V}}}=\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,(\underline{\mathbf{v}}_1\underline{\mathbf{v}}_2\underline{\mathbf{v}}_3\underline{\mathbf{v}}_4)=(\lambda_1\underline{\mathbf{v}}_1\lambda_2\underline{\mathbf{v}}_2\lambda_3\underline{\mathbf{v}}_3\lambda_4\underline{\mathbf{v}}_4)$$

Multiplicando com $\underline{\underline{\mathbf{V}}}^T$:

$$\begin{pmatrix}\underline{\mathbf{v}}_1^T\\\underline{\mathbf{v}}_2^T\\\underline{\mathbf{v}}_3^T\\\underline{\mathbf{v}}_4^T\end{pmatrix}(\lambda_1\underline{\mathbf{v}}_1\lambda_2\underline{\mathbf{v}}_2\lambda_3\underline{\mathbf{v}}_3\lambda_4\underline{\mathbf{v}}_4)$$

O elemento i,j desta matriz é: $\lambda_j\underline{\mathbf{v}}_i^T\underline{\mathbf{v}}_j=\lambda_j\underline{\mathbf{v}}_i\cdot\underline{\mathbf{v}}_j=\lambda_j\delta_{ij}$. Ou seja:

$$\underline{\underline{\mathbf{B}}}=\underline{\underline{\mathbf{V}}}^T\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\underline{\mathbf{V}}}=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0&0\\0&\lambda_2&0&0\\0&0&\lambda_3&0\\0&0&0&\lambda_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&4&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}$$

Mostrando que $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ é diagonal - com os valores $0,2,4,2$ na diagonal.

UFG

Dr. Ole Peter Smith

Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal de Goiás
ole@mat.ufg.br - http://www.ime.ufg.br/docentes/olepeter

2. *3 pts.* Uma aplicação linear, $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ é dado pela sua matriz:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Encontrar o núcleo, $\ker f$, e a sua dimensão. Mostrar que $\underline{\mathbf{d}}_1 = \frac{1}{3}(-2, 2, 1)^T \in \ker f$.
   (b) Encontrar a dimensão e uma base da imagem, Imf.
   (c) Mostrar que os vetores $\underline{\mathbf{d}}_2 = \frac{1}{3}(2, 1, 2)$ e $\underline{\mathbf{d}}_3 = \frac{1}{3}(1, 2, -2)$ formam uma base ortonormal da imagem.
   (d) Mostrar que: $\ker f \perp$ Imf.

   Solution:

   (a)
$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   Vemos que $\rho_A = 2$, assim: $dim \ker f = 3 - 2 = 1$. Introduzindo parâmetro $x_3 = t$: $-x_1 = x_2 = 2t$. Isto é:
$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} t, \quad t \in \mathbb{R}$$
   Observamos que o vetor $\underline{\mathbf{d}}_1 \in \ker f$ ($t = \frac{1}{3}$).
   (b) dimIm$f = \rho_A = 2$, e mais: a imagem é gerado pelos vetores nas colunas de $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$. Os vetores nas primeiras duas colunas são linearmente independentes, assim podemos utilizar-os como uma base da imagem: $\underline{\mathbf{a}}_1 = (1, 0, 2)^T$ e $\underline{\mathbf{a}}_2 = (0, -1, 2)^T$; isto é: Im$f$ =ger$(\underline{\mathbf{a}}_1, \underline{\mathbf{a}}_2)$.
   (c) Primeiramente observamos que $\underline{\mathbf{d}}_2$ e $\underline{\mathbf{d}}_3$ são mutualmente ortogonais e normalizados. Mais: $3\underline{\mathbf{d}}_1 = \underline{\mathbf{a}}_2 + \underline{\mathbf{a}}_3 \in$Im$f$, e $3\underline{\mathbf{d}}_2 = \underline{\mathbf{a}}_1 + \underline{\mathbf{a}}_3 \in$Im$f$. Juntando: $\underline{\mathbf{d}}_2$ e $\underline{\mathbf{d}}_3$ formam uma base ortonormal de Imf.
   (d) Observando que $\underline{\mathbf{d}}_2, \underline{\mathbf{d}}_3 \perp \underline{\mathbf{d}}_1$, concluimos: $\ker f \perp$ Imf.

3. *2 pts.* Consideramos a aplicação e os vetores introduzidos no questão 2.

   (a) Mostre que os vetores $\underline{\mathbf{d}}_1, \underline{\mathbf{d}}_2, \underline{\mathbf{d}}_3$ formam uma base ortonormal em $\mathbb{R}^3$.
   (b) Encontrar as imagens: $f(\underline{\mathbf{d}}_i)$ em relação a base canônica.
   (c) Encontrar as imagens: $f(\underline{\mathbf{d}}_i)$ em relação a base $\underline{\mathbf{d}}_i$.
   (d) Encontrar a matriz do f usando a base $\underline{\mathbf{d}}_i$ no domínio e na imagem.

   Solution:

   (a) Verifica-se:
$$\underline{\mathbf{d}}_1 \cdot \underline{\mathbf{d}}_1 = \underline{\mathbf{d}}_2 \cdot \underline{\mathbf{d}}_2 = \underline{\mathbf{d}}_3 \cdot \underline{\mathbf{d}}_3 = 1$$
   E:
$$\underline{\mathbf{d}}_1 \cdot \underline{\mathbf{d}}_2 = \underline{\mathbf{d}}_1 \cdot \underline{\mathbf{d}}_3 = \underline{\mathbf{d}}_2 \cdot \underline{\mathbf{d}}_3 = 0$$
   Assim os $\underline{\mathbf{d}}_i$'s formam uma base ortonormal em $\mathbb{R}^3$.
   (b)
$$f(\underline{\mathbf{d}}_1) = \underline{\mathbf{0}},$$
   pois $\underline{\mathbf{d}}_1 \in \ker f$.
$$f(\underline{\mathbf{d}}_2) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$f(\underline{\mathbf{d}}_3) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(c) Observamos: $f(\underline{\mathbf{d}}_1) = \underline{\mathbf{0}}$, $f(\underline{\mathbf{d}}_2) = 3\underline{\mathbf{d}}_2$ e $f(\underline{\mathbf{d}}_3) = -3\underline{\mathbf{d}}_3$.

(d) A matriz tem as *imagens dos vetores básicos em colunas*:

$$\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{V}}}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\underline{\mathbf{V}}} = \underline{\underline{\mathbf{V}}}^{T}\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\underline{\mathbf{V}}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Comentário: Os vetores $\underline{\mathbf{d}}_i$ são *autovetores* da matriz $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ com *autovalores* $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$ e $\lambda_3 = -3$.

OBS! Respondendo a prova à lapis, perde-se o direito de revisão da prova. **OBS!**