Dr. Ole Peter Smith

Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal de Goiás
ole@mat.ufg.br - http://www.ime.ufg.br/docentes/olepeter

Data:	01/06/2010
Semestre:	2010.1
Curso:	Matemática
Disciplina:	Álgebra Linear
Prova:	II, 2^a chamada

1. *6 pts.*Dado os vetores:

$$\underline{\mathbf{v}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{\mathbf{v}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{\mathbf{v}}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{\mathbf{v}}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Mostre que os vetores $(\underline{\mathbf{v}}_i)$ formam uma base de $\mathbb{R}^4$.

   (b) Encontrar uma relação expressando as coordenadas em relação a base canônica, em termo das coordenadas em relação a base $(\underline{\mathbf{v}}_i)$.

   (c) Uma aplicação linear, $f : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^3$, é dado por:

$$f(\underline{\mathbf{v}}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad f(\underline{\mathbf{v}}_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad f(\underline{\mathbf{v}}_3) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad f(\underline{\mathbf{v}}_4) = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Encontrar o matriz, $\underline{\underline{\mathbf{A}}}'$, da f usando base canônica em $\mathbb{R}^3$ e base $(\underline{\mathbf{v}}_i)$ em $\mathbb{R}^4$.

   (d) Encontrar o matriz, $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, da f usando base canônica em $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^3$.

   (e) Encontrar a dimensão da imagem, $f(\mathbb{R}^4)$.

   (f) Dado os vetores: $\underline{\mathbf{d}}_1 = \underline{\mathbf{v}}_1 + \underline{\mathbf{v}}_2 - \underline{\mathbf{v}}_3$ e $\underline{\mathbf{d}}_2 = -\underline{\mathbf{v}}_1 + 2\underline{\mathbf{v}}_2 - \underline{\mathbf{v}}_4$. Mostre que $\underline{\mathbf{d}}_1$ e $\underline{\mathbf{d}}_2$ gera o núcleo da f.

   (g) Encontrar, em termos de $\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2, \underline{\mathbf{v}}_3, \underline{\mathbf{v}}_4$, todas as vetores que satisfaz: $f(\underline{\mathbf{x}}) = f(\underline{\mathbf{v}}_1)$.

2. *2 pts.* Sendo $\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2$ uma base em $\mathbb{C}^2$, uma aplicação linear, f, é dado por:

$$f(\underline{\mathbf{v}}_1) = \underline{\mathbf{v}}_1 + 2\underline{\mathbf{v}}_2 \quad f(\underline{\mathbf{v}}_2) = i\underline{\mathbf{v}}_1 + \underline{\mathbf{v}}_2$$

   (a) Encontrar a matriz, $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, da f em relação a base $\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2$.

   (b) Mostre que os vetores: $\underline{\mathbf{w}}_1 = \underline{\mathbf{v}}_1 + \underline{\mathbf{v}}_2$ e $\underline{\mathbf{w}}_2 = \underline{\mathbf{v}}_1 - \underline{\mathbf{v}}_2$ formam uma base de $\mathbb{C}^2$.

   (c) Encontrar a matriz, $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$, da f em relação a base $\underline{\mathbf{w}}_1, \underline{\mathbf{w}}_2$.

3. *2 pts.*Dado a matriz:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   (a) Encontrar as imagens dos vetores: $\underline{\mathbf{v}}_1 = (1, -1, 1)^T$ e $\underline{\mathbf{v}}_2 = (1, -2, 2)^T$.

   (b) Encontrar um vetor, $\underline{\mathbf{v}}_3$, tal que: $f(\underline{\mathbf{v}}_3) = \underline{\mathbf{v}}_2 + \underline{\mathbf{v}}_3$.

   (c) Encontrar a matriz da f em relação a base $\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2, \underline{\mathbf{v}}_3$.

OBS! Respondendo a prova à lapis, perde-se o direito de revisão da prova. **OBS!**