Dr. Ole Peter Smith
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal de Goiás
ole@mat.ufg.br - http://www.ime.ufg.br/docentes/olepeter

Data:	30/03/2010
Semestre:	2010.1
Curso:	Matemática
Disciplina:	Álgebra Linear
Prova:	I, 2^a Chamada

1. *4 pts.* Dado a matriz:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 0 & -a & 0 & a \\ a & 0 & a & 0 \\ 0 & -a & 0 & -a \\ -a & 0 & a & 0 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}$$

   (a) Por quais valores $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ é regular? Para estas valores, encontrar a inversa: $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1}$.

   (b) Por quais valores $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ é ortogonal, isto é: $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}^T$?

   (c) Encontrar a matriz adjunta: $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^*$.

   (d) Resolver a equação matricial: $\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\underline{\mathbf{X}}} = \underline{\underline{\mathbf{0}}}$, onde $\underline{\underline{\mathbf{0}}}$ é 4x4.

Solution:

(a)

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & -a & 0 & a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & -a & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -a & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & -a & 0 & a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2a & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2a & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & -a & 0 & a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & -a & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & a & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & a & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & a & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

Segue, que o posto do $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ é maximal se e somente se $a \neq 0$, e neste caso:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2a} & 0 & -\frac{1}{2a} \\ -\frac{1}{2a} & 0 & -\frac{1}{2a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2a} & 0 & \frac{1}{2a} \\ \frac{1}{2a} & 0 & -\frac{1}{2a} & 0 \end{pmatrix}$$

(b) $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}^T \Leftrightarrow \underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\underline{\mathbf{A}}}^T = \underline{\underline{\mathbf{I}}}$, calculando:

$$\begin{pmatrix} 0 & -a & 0 & a \\ a & 0 & a & 0 \\ 0 & -a & 0 & -a \\ -a & 0 & a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & -a \\ -a & 0 & -a & 0 \\ 0 & a & 0 & a \\ a & 0 & -a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a & 2a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2a^2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\mathbf{I}}} \Leftrightarrow 2a^2 = 1 \Leftrightarrow a = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Isto é: $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ é ortogonal se e somente se: $a = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(c) Da redução em item (a), segue que: $\det \underline{\underline{\mathbf{A}}} = 4a^4$. Furthermore:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}^* = (\det \underline{\underline{\mathbf{A}}})\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} = 4a^4 \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2a} & 0 & -\frac{1}{2a} \\ -\frac{1}{2a} & 0 & -\frac{1}{2a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2a} & 0 & \frac{1}{2a} \\ \frac{1}{2a} & 0 & -\frac{1}{2a} & 0 \end{pmatrix} = 2a^3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(d) De novo, quanto $a \neq 0$, $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ é regular, isto é: $\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\underline{\mathbf{X}}} = \underline{\underline{\mathbf{0}}} \Leftrightarrow \underline{\underline{\mathbf{X}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{0}}} = \underline{\underline{\mathbf{0}}}$.
Quando $a = 0$: $\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \underline{\underline{\mathbf{0}}}$, neste caso qualquer matriz $4x4$ é solução:

$$\underline{\underline{\mathbf{X}}} = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ t_5 & t_6 & t_7 & t_8 \\ t_9 & t_{10} & t_{11} & t_{12} \\ t_{13} & t_{14} & t_{15} & t_{16} \end{pmatrix}, \quad t_1, \dots, t_{16} \in \mathbb{R}$$

2. *4 pts.* Dado os planos em $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{array}{lccccccc} (\alpha): & x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ (\beta): & 2x & - & y & + & (3a-4)z & = & 3 \\ (\gamma): & & & ay & - & z & = & 1 \end{array}$$

(a) Para quais valores de $a \in \mathbb{R}$ os planos α, β e γ tem uma reta em comum?

(b) Para quais valores de $a \in \mathbb{R}$ os planos α, β e γ tem um ponto em comum?

(c) Para quais valores de $a \in \mathbb{R}$ os planos α, β e γ nenhum ponto em comum?

(d) Para $a = 1$ encontrar a intersecção: $\alpha \cap \beta$.

(e) Para $a = 1$ encontrar a intersecção: $\beta \cap \gamma$.

(f) Para $a = 1$ encontrar a intersecção: $\gamma \cap \alpha$.

Solution:
Juntando em uma matriz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 3a-4 & 3 \\ 0 & a & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3a & 3 \\ 0 & a & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -a & -1 \\ 0 & a & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -a & -1 \\ 0 & 0 & a^2-1 & a+1 \end{array}\right)$$

Observamos:
$(I): a = 1: \rho_A = 2 \wedge \rho_T = 3$.
$(II): a = -1: \rho_A = \rho_T = 2$.
$(III): a \neq \pm 1: \rho_A = \rho_T = 3$.

(a) Os planos tem uma reta em comum, se e somente se: $\rho_A = \rho_T = n - 1 = 2$, ou seja: $a = -1$.

(b) Os planos tem um ponto em comum, se e somente se: $\rho_A = \rho_T = n = 3$, ou seja: $a \neq \pm 1$.

(c) Os planos tem um ponto em comum, se e somente se: $\rho_A < \rho_T$, ou seja: $a = 1$.

(d) Colocando $a = 1$ obtemos::

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Pondo $z = t: x = 1 + t \wedge y = -1 + t$. De forma vetorial:

$$\underline{\mathbf{x}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

(e)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Pondo $z = t : x = 2 + t \wedge y = 1 + t$. De forma vetorial:

$$\underline{\mathbf{x}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

(f)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Pondo $z = t : x = -1 + t \wedge y = 1 + t$. De forma vetorial:

$$\underline{\mathbf{x}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

3. *2 pts.* Dado a matriz:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a^2 - a \\ a & a & 1 & a^3 - 2a^2 + a \\ -1 & 3a & 0 & 2a^2 - 2a \\ a & 2a & 1 & a^3 - a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}$$

(a) Encontrar o posto $\rho_{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

(b) Por todo $a \in \mathbb{R}$ resolver a equação matricial: $\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\underline{\mathbf{X}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}$.

Solution:

(a)

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a^2 - a \\ a & a & 1 & a^3 - 2a^2 + a \\ -1 & 3a & 0 & 2a^2 - 2a \\ a & 2a & 1 & a^3 - a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a^2 - a \\ 0 & a & 1 & -a^2 + a \\ 0 & 3a & 0 & 3a^2 - 3a \\ 0 & 2a & 1 & a^2 - a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a^2 - a \\ 0 & a & 1 & -a^2 + a \\ 0 & 0 & -3 & 6a^2 - 6a \\ 0 & 0 & -1 & 3a^2 - 3a \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a^2 - a \\ 0 & a & 1 & -a^2 + a \\ 0 & 0 & -3 & 6a^2 - 6a \\ 0 & 0 & -1 & 3a^2 - 3a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a^2 - a \\ 0 & a & 0 & 2a^2 - 2a \\ 0 & 0 & 0 & -3a^2 + 3a \\ 0 & 0 & -1 & 3a^2 - 3a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a^2 - a \\ 0 & a & 0 & 2a^2 - 2a \\ 0 & 0 & -1 & 3a^2 - 3a \\ 0 & 0 & 0 & -3a^2 + 3a \end{pmatrix}$$

Dai segue:
$(I) : a = 0 : \rho = 2.$
$(II) : a = 1 : \rho = 3.$
$(III) : a \neq 0, 1 : \rho = 4.$

(b) É claro, que em todos os casos a equação: $\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\underline{\mathbf{X}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}$, tem *no minimo* a solução: $\underline{\underline{\mathbf{X}}} = \underline{\underline{\mathbf{I}}}$.
Nos casos $a \neq 0, 1$ o posto do $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ é maximal, assim temos solução única, ou seja solução completa: $\underline{\underline{\mathbf{X}}} = \underline{\underline{\mathbf{I}}}$.
Caso $a = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0 \end{pmatrix} \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}} \Leftrightarrow x_1 = x_3 = 0$$

Assim, x_2 e x_4 são parâmetros livres (dois para cada coluna), dando a solução completa da equação matricial homogênea:

$$\underline{\underline{\mathbf{X}}}_H=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\t_1&t_2&t_3&t_4\\0&0&0&0\\s_1&s_2&s_3&s_4\end{pmatrix},\quad t_1,\ldots,t_4,s_1,\ldots,s_4\in\mathbb{R}$$

Temos júma solução particular da equção (matricial) não homogênea: $\underline{\underline{\mathbf{X}}}_p=\underline{\underline{\mathbf{I}}}$, assim a solução completa da equação não homogêne é:

$$\underline{\underline{\mathbf{X}}}=\underline{\underline{\mathbf{I}}}+\begin{pmatrix}0&0&0&0\\t_1&t_2&t_3&t_4\\0&0&0&0\\s_1&s_2&s_3&s_4\end{pmatrix},\quad t_1,\ldots,t_4,s_1,\ldots,s_4\in\mathbb{R}$$

Completando com o caso $a=1$:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Agora: $x_1=x_2=x_3=0$, deixando só uma parâmetro por coluna, x_4, livre:

$$\underline{\underline{\mathbf{X}}}_H=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\s_1&s_2&s_3&s_4\end{pmatrix},\quad s_1,\ldots,s_4\in\mathbb{R}$$

E a solução completa da equação não homogênea:

$$\underline{\underline{\mathbf{X}}}=\underline{\underline{\mathbf{I}}}+\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\s_1&s_2&s_3&s_4\end{pmatrix},\quad s_1,\ldots,s_4\in\mathbb{R}$$

OBS! Respondendo a prova à lapis, perde-se o direito de revisão da prova. **OBS!**