Dr. Ole Peter Smith
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal de Goiás
ole@mat.ufg.br

Data:	27/05/2009
Curso	Engenharia de Computação
Disciplina:	Álgebra Linear
Lista:	I

1 Vetores em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

1.1 Dado os vetores $\underline{a} = (1, 3, -1)^T$, $\underline{b} = (0, 2, 4)^T$ e $\underline{c} = (2, 1, -1)^T$. Determine o constante k, tal que: $\underline{a} + k\underline{b}$ é perpendicular ao $\underline{c}$.

Answer:
$k = 3$.

1.2 O vetor $\underline{a} = (3, 1, 2)^T$ está sendo decomposto em uma direção paralelo com o vetor, $\underline{b} = (4, -8, 1)^T$ e outra direção perpendicular do $\underline{b}$. Qual os coordenados destes compoentes?

Answer:
$\underline{a}_{\|} = \frac{1}{27}(73, 43, 52)^T$ e $\underline{a}_{\perp} = \frac{1}{27}(8, -16, 2)^T$.

1.3 Por quais valores do $a \in \mathbb{R}$ os vetores $\underline{a} = (a, 2a, 3a^2)^T$ e $\underline{b} = (1, -1, a)^T$ são ortogonais?

Answer:
$a = 0 \vee a = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

1.4 Dado os vetores: $\underline{a} = (1, -1, 2)^T$ e $\underline{b} = (-1, k, k)^T$, $k \in \mathbb{R}$. Por quais valores do k a equação: $\underline{r} \times \underline{a} = \underline{b}$ tem soluções? Para estes valores de k, encontre a solução completa da equação.

Answer:
$k = -2$: $\underline{r} = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)^T + t(1, -1, 2)^T$, $t \in \mathbb{R}$.
$k = 3$: $\underline{r} = \left(\frac{23}{6}, \frac{19}{6}, -\frac{1}{3}\right)^T + t(1, -1, 2)^T$, $t \in \mathbb{R}$.

1.5 Encontre a reta de intersecção entre os planos:

$$5x + 3y - 2z = 4$$
$$3x - 2y - 2z = 2$$

Encontre a equação do plano contendo esta reta e que é paralelo com o plano:

$$14x - 3y - 8z = 1$$

Answer:
$(x, y, z) = (1, 0, \frac{1}{2}) + t(10, -4, 19),\ t \in \mathbb{R}$, $14x - 3y - 8z = 10$.

1.6 Dados os pontos em $\mathbb{R}^3$: $A(1, 2, 3)^T$, $B(2, 4, 5)^T$, $C(6, 3, 4)^T$ e $D(5, 1, 2)$. Sabendo que estes pontos são vertices de um cubo, encontro os 4 vertices restantes.

2 Determinantes

2.1 Calcular os determinantes:

(a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & 15 & 3 \end{vmatrix}$$

Answer: -360.

(b)

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

Answer: -18.

(c)

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

Answer: 34.

(d)

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Answer: -135.

(e)

$$\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix}, \quad a,b,c \in \mathbb{R}$$

Answer: $4abc$.

(f)

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix}, \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}$$

Answer: $(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$.

(g)

$$\begin{vmatrix} 1-n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n \end{vmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}$$

(Ordem do determinante n). **Answer**: 0.

(h)

$$\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

Answer: $(a+(n-1)b)\,(a-b)^n$.

2.2 Encontrar os raízes em:

$$\begin{vmatrix} x^2+x-6 & 4x-8 & 14 \\ x^2-3 & 3x-5 & 7 \\ x-3 & x-3 & 6 \end{vmatrix}$$

Answer:
$x=1 \vee x=2 \vee x=3$.

2.3 Encontrar a,b,c,d tal que a curva com a equação:

$$y = ax^3+bx^2+cx+d$$

passa pelos pontos: $(-2,16)$, $(-1,0)$,$(1,-8)$ e $(3,-24)$.

2.4 Mostre, usando indução (o determinante é de ordem n):

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\varphi & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\varphi & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\varphi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2\cos\varphi & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 2\cos\varphi \end{vmatrix} = \cos n\varphi, \quad \varphi \in \mathbb{R}$$

2.5 Mostre, usando indução (o determinante é de ordem n):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3^2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 & (n-1)^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = n!$$

2.6 Mostre, usando indução (o determinante é de ordem $2n$):

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & b & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & b & \cdots & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & \cdots & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = (a^2-b^2)^n, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

3 Sistemas Lineares

3.1 Resolver a sistema linear:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & & & & & = & 3 \\ -x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & & & = & 4 \\ & & 4x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 5 \\ & & & & 3x_3 & - & 7x_4 & = & 4 \end{array} \right\}$$

3.2 Resolver a sistema linear:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 9x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\ 4x_1 & - & 4x_2 & + & 12x_3 & - & 8x_4 & = & 0 \end{array} \right\}$$

3.3 Resolver a sistema linear:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 3 \\ 2x & - & y & + & 4z & = & 0 \\ x & + & 3y & - & 2z & = & 3 \\ -3x & - & 2y & + & z & = & 0 \end{array} \right\}$$

Answer:
$(x, y, z) = (-1, 2, 1)$.

3.4 Resolver a sistema linear:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} 8x_1 & + & 6x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & -9 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & 11x_4 & = & -28 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 5x_4 & = & -13 \\ & & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 17x_4 & = & -43 \end{array} \right\}$$

3.5 Resolver a sistema linear:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ -4x_1 & - & 5x_2 & + & 7x_3 & - & 7x_4 & = & -7 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 3 \\ -x_1 & - & 5x_2 & + & 8x_3 & - & 3x_4 & = & -3 \end{array} \right\}$$

3.6 Resolver a sistema linear:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcr} 3x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & - & x_5 & = & 1 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 7x_3 & - & 3x_4 & + & 5x_5 & = & 2 \\ x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & + & 5x_4 & - & 7x_5 & = & 3 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & 7x_3 & - & 5x_4 & + & 8x_5 & = & 3 \end{array} \right\}$$

3.7 Resolver a sistema linear:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & - & x_4 & & & = & 1 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & + & x_5 & = & -1 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & - & x_5 & = & 3 \\ x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & + & x_4 & - & x_5 & = & 3 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & -1 \end{array} \right\}$$

4 Matrizes

4.1 Calcular os produtos $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}$ e $\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}$, quanto:

(a)

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

4.2 Calcular os produtos $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}$ e $\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}$, e verifique que $\det \underline{\underline{A}} \cdot \det \underline{\underline{B}} = \det \underline{\underline{B}} \cdot \det \underline{\underline{A}}$:

(a)

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 9 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

4.3 Encontre o posto dos matrizes ($\lambda \in \mathbb{R}$):

(a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

4.4 Encontre os matrizes inversos, $\underline{\underline{A}}^{-1}$, (se existem) e verifique que: $\det(\underline{\underline{A}}^{-1}) = (\det \underline{\underline{A}})^{-1}$:

(a)

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad \lambda \neq 0$$

4.5 Resolve as equações matriciais: $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{B}}$ e $\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{X}}$, quanto:

(a)

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4.6 Resolve a equação matricial não-linear ($\underline{\underline{X}}$ quadrática):

$$\underline{\underline{X}}^2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad a \in \mathbb{R}$$

5 Espaços Vetoriais

5.1 Dado os polinômios:

$$p_1(x) = 1 - x \qquad p_2(x) = x(1-x) \qquad p_3(x) = 1 - x^2$$

São linearmente independentes ou não?

5.2 Dado os matrizes:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -5 & -8 \\ -16 & 4 \end{pmatrix}$$

São linearmente independentes ou não?

5.3 Dado as funções::

$$f_1(x) = \sinh^2 x \qquad f_2(x) = \cosh 2x \qquad f_3(x) = 1$$

São linearmente independentes ou não?
Aqui:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

5.4 Qual a dimensão do conjunto gerado por os vetores em $\mathbb{R}^4$:

(a)

$$\underline{\mathbf{v}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{\mathbf{v}}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{\mathbf{v}}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{\mathbf{v}}_4 = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \underline{\mathbf{v}}_5 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\underline{\mathbf{v}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \underline{\mathbf{v}}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ -12 \\ 15 \end{pmatrix} \qquad \underline{\mathbf{v}}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

5.5 Mostre que os vetores $\underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{v}}_2, \underline{\mathbf{v}}_3, \underline{\mathbf{v}}_4$ constitui um base de $\mathbb{R}^4$ e encontre uma relação matricial entre os coordenados antigos e os coordenados novos: $\underline{\mathbf{x}}' = \underline{\underline{\mathbf{V}}}\,\underline{\mathbf{x}}$. Encontrar os coordenados novos do vetor $\underline{\mathbf{v}}_5$:

$$\underline{\mathbf{v}}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{\mathbf{v}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{\mathbf{v}}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{\mathbf{v}}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{\mathbf{v}}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5.6 Um espaço, U, é gerado por os vetores $\underline{\mathbf{a}}_1, \cdots, \underline{\mathbf{a}}_4$ abaixo. Encontre a dimensão do U e um sistema homogêneao cuja o espaço soluccional é U:

$$\underline{\mathbf{a}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \underline{\mathbf{a}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \underline{\mathbf{a}}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \underline{\mathbf{a}}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 10 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

5.7 Dado os matrizes:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{\mathbf{B}}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Mostrar que $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ é regular e encontrar $\underline{\underline{\mathbf{B}}}^{-1}$

(b) Resolver a equação matricial:

$$\underline{\underline{\mathbf{X}}}\,\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}$$

5.8 Dado os vetores:

$$\underline{\mathbf{v}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \underline{\mathbf{v}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{\mathbf{v}}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mostrar que $\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2, \underline{\mathbf{v}}_3$ formam um base de $\mathbb{R}^3$ e encontrar os coordenados do $\underline{\mathbf{e}}_1, \underline{\mathbf{e}}_2, \underline{\mathbf{e}}_3$ neste base.

5.9 Dado os vetores:

$$\underline{\mathbf{v}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \underline{\mathbf{v}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{\mathbf{v}}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Mostrar que $\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2, \underline{\mathbf{v}}_3$ formam um base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Encontrar vetores normalizados: $\underline{\mathbf{v}}_i' = \dfrac{\underline{\mathbf{v}}_i}{|\underline{\mathbf{v}}_i|}$.

(c) Mostrar que $\underline{\mathbf{v}}_1', \underline{\mathbf{v}}_2', \underline{\mathbf{v}}_3'$ formam um base *ortonormal*, isto é:

$$\underline{\mathbf{v}}_1' \cdot \underline{\mathbf{v}}_2' = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

(d) Organizando os $\underline{\mathbf{v}}_i$'s como as coluna em uma matriz, $\underline{\underline{\mathbf{V}}}$, mostrar que este matriz é *ortogonal*, isto é: $\underline{\underline{\mathbf{V}}}-1 = \underline{\underline{\mathbf{V}}}^T$.

(e) Encontrar uma equação matricial entre os coordenados no base canônica, $\underline{\mathbf{e}}_1, \underline{\mathbf{e}}_2, \underline{\mathbf{e}}_3$, e os coordenados no base $\underline{\mathbf{v}}_1', \underline{\mathbf{v}}_2', \underline{\mathbf{v}}_3'$ - e vice-versa.

5.10 Dado o matriz:

$$\underline{\underline{\mathbf{R}}}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

(a) Mostre, usando indução: $\underline{\underline{\mathbf{R}}}(\theta)^n = \underline{\underline{\mathbf{R}}}(n\theta)$, por $n \in \mathbb{N}$.

(b) Mostre que o matriz $\underline{\underline{\mathbf{R}}}(\theta)$ é ortogonal.

(c) Mostre que: $\underline{\underline{\mathbf{R}}}(\theta)^{-1} = \underline{\underline{\mathbf{R}}}(-\theta)$.

(d) Mostre $\underline{\underline{\mathbf{R}}}(\theta)^n = \underline{\underline{\mathbf{R}}}(n\theta)$, por $n \in \mathbb{Z}$.

(e) Consideramos a aplicação vetorial:

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\underline{\mathbf{R}}}(\theta)\underline{\mathbf{x}}$$

Encontrar os imagens de:

$$\underline{\mathbf{v}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{\mathbf{v}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{\mathbf{v}}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{\mathbf{v}}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Fazer uma figura mostrando os vetores e seus imagens. Qual interpretação geométrica podemos fazer desta aplicação?

5.11 Dado o matriz:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & -1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

(a) Encontrar det $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$.

(b) Encontrar o posto do $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ por qualquer valor do $a \in \mathbb{R}$.

(c) Resolver para quaisquer valores de $a, b \in \mathbb{R}$ a sistema:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} b \\ b \\ 2b \\ 1 \end{pmatrix}$$

6 Aplicações Lineares

6.1 Encontrar posto, núcleo e dimensão do imagem para os seguintes aplicações lineares:

(a) $f(\underline{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 7 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \underline{\mathbf{x}}$

(b) $f(\underline{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & -1 & 8 \\ 3 & 8 & -9 & -5 \end{pmatrix} \underline{\mathbf{x}}$

6.2 (233) Encontrar o matriz da aplicação linear, $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dado por: $f(2,1,0)^T = (1,4,1)^T$, $f(0,0,2)^T = (4,2,2)^T$ e $f(1,1,0)^T = (1,2,1)^T$. Encontrar o imagem do plano: $t(1,2,3)^T + s(-1,2,0)^T$.

Answer:
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $t(8,5,5)^T + s(2,-2,2)^T,\ t, s \in \mathbb{R}$.

6.3 Encontrar o matriz da aplicação linear, $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, dado por: $f(1,2)^T = (-3,0,1)^T$ e $f(2,1)^T = (0,-1,0)^T$.

6.4 * Uma aplicação linear, $f : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$, é dado pela matriz:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i & 0 \\ 1 & -i & i & 1 \\ -i & 0 & -1 & 0 \\ i & -1 & -1 & -i \end{pmatrix}$$

(a) Encontrar o núcleo do f, e uma base da imagem, $f(\mathbb{C}^4)$.

(b) Encontrar a intersecção entre o núcleo e a imagem.

(c) Encontrar o conjunto: $\left\{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{C}^4 |\ f(\underline{\mathbf{x}}) = (1, -i, -i, -1+2i)^T\right\}$.

6.5 Dado o matriz não-simétrico:

$$\begin{pmatrix} 3 & -7 & 9 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

e a aplicação linear: $f(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\mathbf{x}}$.

(a) Mostrar que $\lambda = 2$ e raíz de multiplicidade 3 no polinômio caraterístico da $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$.

(b) Encontrar autovetores e autovalores de $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, e justifique que $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ *não* é diagonalizável.

(c) Considerando os vetores: $\underline{\mathbf{u}}_1 = (2,0,-1)^T$ e $\underline{\mathbf{u}}_2 = (0,4,3)^T$, mostre que: $f(U) = U$, onde: $U = ger\{\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2\}$.

6.6 (245) Uma aplicação linear é dado por: $f(1,2,1)^T = (1,2,1)^T$, $f(2,1,0)^T = (-4,-2,0)^T$ e $f(1,1,1)^T = (0,0,0)^T$. Sem encontrar a matriz do f, encontrar seu polinômio caraterística, seu traço e seu determinante.

Dr. Ole Peter Smith
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal de Goiás
ole@mat.ufg.br

7 Autovalores e Autovetores

7.1 Encontrar autovalores e autovetores para as seguintes matrizes:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -6 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(d) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

7.2 Em $\mathbb{R}^3$ consideramos o vetor: $\underline{\mathbf{v}} = (a, a+1, 1)$.

(a) Escreve $\underline{\mathbf{k}}$ como uma combinação linear do $\underline{\mathbf{i}}$, $\underline{\mathbf{j}}$ e $\underline{\mathbf{v}}$.

(b) Uma aplicação linear, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, é dado por:

$$f(\underline{\mathbf{i}}) = \underline{\mathbf{v}} \times \underline{\mathbf{j}} \qquad f(\underline{\mathbf{j}}) = \underline{\mathbf{v}} \qquad f(\underline{\mathbf{v}}) = \underline{\mathbf{i}}$$

Mostre que o matriz do f no base $(\underline{\mathbf{i}}, \underline{\mathbf{j}}, \underline{\mathbf{k}})$ é dado por:

$$\begin{pmatrix} -1 & a & 1-a^2 \\ 0 & a+1 & -(a+1)^2 \\ a & 1 & -a^2-a-1 \end{pmatrix}$$

(c) Encontrar por qualquer valor do a a dimensão do imagem, $f(\mathbb{R}^3)$.

(d) No matriz $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ pomos $a = 0$: $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_0$. Encontrar autovalores e autovetores para $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_0$. Demostre que $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_0$ *não* é diagonalizável.

7.3 Dado a matriz simétrica: $\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Encontrar os autovalores, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ para $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$.

(b) Encontrar uma base ortonormal de autovetores da f.

(c) Encontrar a matriz ortogonal, $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$, desta base.

(d) Encontrar $\underline{\underline{\mathbf{D}}}^{-1}$, e mostre:

$$\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{D}}}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{A}}}\underline{\underline{\mathbf{D}}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Answer:

$$\underline{\underline{\mathbf{D}}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

7.4 Uma aplicação linear, f, é dado por sua matriz: $\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Encontrar autovalores e autovetores para f. Ans: $\lambda = -1$ (triplo).

(b) Demonstre que $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ não é diagonaizável.

(c) Encontrar todos vetores, $\underline{\mathbf{d}}_2$, que satisfaz: $f(\underline{\mathbf{d}}_2) = \underline{\mathbf{d}}_1 - \underline{\mathbf{d}}_2$. Ans: $\underline{\mathbf{d}}_2 = (0,-1,0)^T + t(-1,2,1)^T, \;\; t \in \mathbb{R}$.

(d) Mostre que existe uma base, $(\underline{\mathbf{d}}_1, \underline{\mathbf{d}}_2, \underline{\mathbf{d}}_3)$ de $\mathbb{R}^3$, cuja a aplicação f é dado pela matriz:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Encontrar $(\underline{\mathbf{d}}_1, \underline{\mathbf{d}}_2, \underline{\mathbf{d}}_3)$.
Hint: Use o vetor encontrado no item anterior, por exemplo com $t = 0$.

Answer:
$\underline{\mathbf{d}}_3 = (-1,1,0)^T + t(-1,2,1)^T, \;\; t \in \mathbb{R}$. Por exemplo: $\underline{\mathbf{d}}_3 = (-1,1,0)^T$.

7.5 Uma aplicação linear, f, é dado por sua matriz: $\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & -3 \\ -3 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Encontrar $kerf = \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^4 | \; f(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\mathbf{0}} \right\}$

(b) Encontrar a dimensão do imagem, $f(\mathbb{R}^4)$ e uma base desta.

8 Formas Quadráticas

8.1 Dado a curva, C:

$$(*) \quad 5x^2 + 7y^2 + 2\sqrt{3}xy = 1$$

(a) Encontrar uma substituição ortogonal reduzindo $(*)$ em uma forma sem termos mistos. Qual a equação da curva em termos das coordenadas novas?

(b) Caraterize a curva C geometricalmente e a esbocar no plano XY.

Answer:
$\lambda_1 = 4 \quad \lambda_2 = 8$,
$\underline{\underline{\mathbf{D}}} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$.

8.2 Dado a forma quadrática:

$$(*) \quad 5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 8xy - 8yz - 8zx$$

(a) Encontrar uma substituição ortogonal que reduz $(*)$ em uma forma sem termos mistos: $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \lambda_3 z_1^2$, com $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$.

(b) Uma superfície, S, é dado por:

$$5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 8xy - 8yz - 8zx - 6x - 6y - 6z = 0$$

Mostrar que S é uma cone de revolução.

(c) Encontrar uma parametrização do eixo de revolução da S.

Answer:
$\lambda_1 = -3 \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 9$,
$\underline{\underline{\mathbf{D}}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$,
$(x, y, x)^T = (-1, -1, -1)^T + t(1, 1, 1)^T,\ t \in \mathbb{R}$.

8.3 Reduzir as formas quadráticas para uma forma sem termos mistos, determinando a substituição ortogonal:

(a) $x^2 - 2xy + y^2$
(b) xy
(c) $3x^2 - 2\sqrt{3}xy + y^2$
(d) $x^2 + 9y^2 - 6xy$

8.4 Reduzir as formas quadráticas para uma forma sem termos mistos, determinando a substituição ortogonal:

(a) $z^2 - xy$
(b) $x^2 + y^2 - z^2 - 2xy$
(c) $4x^2 + 7y^2 + 7z^2 - 2xy - 4yz - 2zx$
(d) $5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2yz - 2zx$
(e) $\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}z^2 + 3xz + 2xy$

9 Produtos Escalares

9.1 (378) Dado o matriz:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

E a função bilinear:

$$g(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}) = \underline{\mathbf{x}}^T \underline{\underline{\mathbf{A}}}\ \underline{\mathbf{y}}$$

(a) Encontrar autovetores e autovalores para $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$.
(b) Encontrar uma base de autovetores ortonormais ao respeito do produto escalar normal.
(c) Mostrar que g é um produto escalar e que os vetores $(1, 0, 0)^T$ e $(1, -4, -1)^T$ são ortogonais ao respeito do g.
(d) Determinar uma base de $\mathbb{R}^3$ ortonormal ao respeito de g.

Answer:
$\lambda_1 = 3 : \underline{\mathbf{v}}_1 = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})^T$,
$\lambda_2 = \lambda_3 = 6 : \underline{\mathbf{v}}_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)^T,\ \ \underline{\mathbf{v}}_3 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}})^T$,
Usar os autovetores: $\frac{1}{\sqrt{12}}(1, 1, 0)^T,\ \frac{1}{3}(-1, 1, 1)^T,\ \frac{1}{6}(1, -1, 2)^T$, ou: $\frac{1}{\sqrt{5}}(1, 0, 0)^T,\ \frac{1}{\sqrt{72}}(1, -4, -1)^T,\ \frac{1}{\sqrt{120}}(1, 0, -5)^T$.

9.2 (415) Dado o matriz:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

E a função bilinear:

$$g(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}) = \underline{\mathbf{x}}^T \underline{\underline{\mathbf{A}}}\ \underline{\mathbf{y}}$$

(a) Encontrar autovetores e autovalores para $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$.

(b) Encontrar uma base de autovetores ortonormais ao respeito ao produto escalar normal em $\mathbb{R}^3$.

(c) Mostrar que os autovetores também são ortogonais ao respeito do produto escalar g.

(d) Encontrar uma base ortonormal ao respeito de g.

Answer:
$\lambda_1 = 2 : \underline{\mathbf{v}}_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)^T$,
$\lambda_2 = 3 : \underline{\mathbf{v}}_2 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})^T$,
$\lambda_3 = 6 : \underline{\mathbf{v}}_3 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}})^T$,
Usar os autovetores: $(\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2, \underline{\mathbf{v}}_2)$ e $(\underline{\mathbf{v}}_1/\sqrt{\lambda_1}, \underline{\mathbf{v}}_2/\sqrt{\lambda_2}, \underline{\mathbf{v}}_2/\sqrt{\lambda_3})$