Compêndio de Álgebra Linear

1 Vetores

1.1 Geral:

1.1.1 Produto Escalar:

$$\underline{\mathbf{u}} \cdot \underline{\mathbf{v}} = u_1 v_1 + \cdots u_n v_n = \sum_{i=1}^{+\infty} u_i v_i$$

1.1.2 Comprimento:

$$|\underline{\mathbf{u}}| = \sqrt{\underline{\mathbf{u}} \cdot \underline{\mathbf{u}}} = \sqrt{u_1^2 + \cdots u_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{+\infty} u_i^2}$$

1.1.3 Vetor de unidade:

$$\underline{\mathbf{e}} = \frac{\underline{\mathbf{u}}}{|\underline{\mathbf{u}}|}$$

1.1.4 Ângulo entre vetores:

$$\cos\alpha = \frac{\underline{\mathbf{u}} \cdot \underline{\mathbf{v}}}{|\underline{\mathbf{u}}||\underline{\mathbf{v}}|}$$

1.1.5 Ortogonalidade:

$$\underline{\mathbf{u}} \perp \underline{\mathbf{v}} \Leftrightarrow \underline{\mathbf{u}} \cdot \underline{\mathbf{v}} = 0$$

1.1.6 Projeção de $\underline{\mathbf{u}}$ em $\underline{\mathbf{v}}$:

$$\underline{\mathbf{u}}_1 = \frac{\underline{\mathbf{u}} \cdot \underline{\mathbf{v}}}{|\underline{\mathbf{v}}|^2} \underline{\mathbf{v}}$$

1.1.7 Projeção de $\underline{\mathbf{u}}$ em vetor de unidade $\underline{\mathbf{e}}$:

$$\underline{\mathbf{u}}_1 = (\underline{\mathbf{u}} \cdot \underline{\mathbf{e}})\underline{\mathbf{e}}$$

1.2 Vetores no Plano

1.2.1 Vetor versor de $\underline{\mathbf{u}} = (u_1, u_2)^T$:

$$\widehat{\underline{\mathbf{u}}} = \begin{pmatrix} -u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} : \quad \underline{\mathbf{u}} \cdot \widehat{\underline{\mathbf{u}}} = 0$$

1.2.2 Versor e ângulo:

$$\sin\alpha = \frac{\widehat{\underline{\mathbf{u}}} \cdot \underline{\mathbf{v}}}{|\underline{\mathbf{u}}||\underline{\mathbf{v}}|}$$

1.3 Vetores no Espaço

1.3.1 Reta passando por $P_0(x_0, y_0, z_0)^T$ na direção $\underline{\mathbf{r}} = (r_1, r_2, r_3)^T$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}$$

1.3.2 Reta passando por $P_0(x_0, y_0, z_0)^T$ com normal $\underline{\mathbf{n}} = (a, b, c)^T$:

$$\underline{\mathbf{n}} \cdot P_0P = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0 = d$$

1.3.3 Distância (com sinal) entre reta, l, e ponto $P(x, y, z)^T$):

$$d(l, P) = \frac{ax + by + cz}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

1.3.4 Produto vetorial:

$$\underline{\mathbf{u}} \times \underline{\mathbf{v}} = \begin{vmatrix} \underline{\mathbf{i}} & \underline{\mathbf{j}} & \underline{\mathbf{k}} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \qquad \underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}} \perp \underline{\mathbf{u}} \times \underline{\mathbf{v}}$$

1.3.5 Produto espacial:

$$[\underline{\mathbf{u}}\ \underline{\mathbf{v}}\ \underline{\mathbf{w}}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \underline{\mathbf{u}} \cdot (\underline{\mathbf{v}} \times \underline{\mathbf{w}})$$

2 Matrizes I

2.1 Matriz: $\underline{\underline{\mathbf{A}}} = (a_{ij}) \in M^{mn}$:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

2.2 Operações:

2.2.1 Soma: $\underline{\underline{\mathbf{C}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}} + \underline{\underline{\mathbf{B}}}$

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

2.2.2 Multiplicação com constante: $\underline{\underline{\mathbf{C}}} = \alpha\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$c_{ij} = \alpha a_{ij}$$

2.2.3 Multiplicação de matrizes, $\underline{\underline{\mathbf{A}}} \in M^{mp}$ e $\underline{\underline{\mathbf{B}}} \in M^{pn}$: $\underline{\underline{\mathbf{C}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}\mathbf{B}}} \in M^{mn}$:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ip} b_{pj}$$

2.2.4 Transposto, $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^T$: $(a_{ij})^T = (a_{ji}$

2.2.5 Traço de matriz quadrática, $Tr(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

2.3 Propriedades:

2.3.1 Propriedade comutativa:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} + \underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{B}}} + \underline{\underline{\mathbf{A}}} \qquad \underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\underline{\mathbf{B}}} \neq \underline{\underline{\mathbf{B}}}\,\underline{\underline{\mathbf{A}}}$$

2.3.2 Propriedade associativa:

$$(\underline{\underline{\mathbf{A}}}+\underline{\underline{\mathbf{B}}})+\underline{\underline{\mathbf{C}}}=\underline{\underline{\mathbf{A}}}+(\underline{\underline{\mathbf{B}}}+\underline{\underline{\mathbf{C}}}) \qquad (\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\underline{\mathbf{B}}})\underline{\underline{\mathbf{C}}}=\underline{\underline{\mathbf{A}}}(\underline{\underline{\mathbf{B}}}\,\underline{\underline{\mathbf{C}}})$$

2.3.3 Propriedade distribuitiva:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}(\underline{\underline{\mathbf{B}}}+\underline{\underline{\mathbf{C}}})=\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\underline{\mathbf{B}}}+\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\underline{\mathbf{C}}}$$

2.4 Matrizes notáveis:

$$\underline{\underline{\mathbf{0}}}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{\mathbf{I}}}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{0}}}+\underline{\underline{\mathbf{A}}}=\underline{\underline{\mathbf{A}}}+\underline{\underline{\mathbf{0}}}=\underline{\underline{\mathbf{A}}} \qquad \underline{\underline{\mathbf{I}}}\,\underline{\underline{\mathbf{A}}}=\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\underline{\mathbf{I}}}=\underline{\underline{\mathbf{A}}}$$

2.5 Produto escalar como produto de matrizes:

$$\underline{\mathbf{u}}\cdot\underline{\mathbf{v}}=\underline{\mathbf{u}}^T\underline{\mathbf{v}}$$

3 Determinantes

3.1 Permutações:

3.1.1 $n!=n(n-1)\cdots 1$ permutações dos números $(1,\dots,n)$, P_n:

$$p=(1,\dots,n)\to(j_1,\dots,j_n)$$

3.1.2 Representação de permutação:

$$p=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}$$

3.1.3 Transposição trocando i e j:

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ 1 & \dots & j & \dots & i & \dots & n \end{pmatrix}$$

3.1.4 Qualquer permutação pode ser decomposto em transposições:

$$sgn(p)=\begin{cases} 1, & n^o\ par\ de\ transp. \\ 1, & n^o\ impar\ de\ transp. \end{cases}$$

3.2 Determinante de matriz quadrática de ordem n:

$$\det\underline{\underline{\mathbf{A}}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} := \sum_{P_n} sgn(j_1,\cdots,j_n)a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}=\sum_{P_n} sgn(j_1,\cdots,j_n)\prod_{i=1}^{n} a_{ij_i}$$

3.2.1 Area (com sinal) da paralelograma no plano com lados $\underline{\mathrm{a}}$ e $\underline{\mathrm{b}}$:

$$A=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1=\underline{\mathbf{a}}\cdot\widehat{\underline{\mathbf{b}}}$$

3.2.2 Volume (com sinal) da paralelipipida no espaço com lados $\underline{a}$, $\underline{b}$ e $\underline{c}$:

$$V = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \underline{\mathbf{a}} \cdot (\underline{\mathbf{b}} \times \underline{\mathbf{c}})$$

3.2.3 Trocando duas linhas (colunas) o determinante troca de sinal.

3.2.4 Se o determinante contém duas linhas (colunas) iguais, seu valor e 0.

3.2.5 Multiplicando uma linha (coluna) com α, multiplica o determinante com α.

3.2.6 Se o determinante contém duas linhas (colunas) proporcianais, seu valor e 0.

3.2.7 Determinante com zeros abaixo (ou acima) do diagonal, é o produto dos elementos no diagonal:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdot \ldots \cdot a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

3.3 Menor de determinante: apagando linha i e coluna j, D_{ij}.

3.4 Cofator de determinante: $A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$.

3.5 Expansão de Laplace em linha i.

$$\det \underline{\underline{\mathbf{A}}} = a_{i1}D_{i1} + \cdots + a_{in}D_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} D_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} D_{i'j} = 0,\ i \neq i'$$

3.5.1 Expansão de Laplace em coluna j:

$$\det \underline{\underline{\mathbf{A}}} = a_{1j}D_{1j} + \cdots + a_{nj}D_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} D_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} D_{ij'} = 0,\ j \neq j'$$

3.6 Determinante não mude sobre uma operação de linha, $L_i := L_i - \alpha L_j$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} - \alpha a_{j1} & a_{i2} - \alpha a_{j2} & \dots & a_{in} - \alpha a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

3.6.1 Determinante não mude sobre uma operação de coluna, $C_i := C_i - \alpha C_j$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ a_1 & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} - \alpha a_{1j} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i} - \alpha a_{2j} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ a_1 & \dots & a_{ni} - \alpha a_{nj} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

3.7 Propriedades:

$$\det(\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\underline{\mathbf{B}}}) = \det\underline{\underline{\mathbf{A}}}\det\underline{\underline{\mathbf{B}}} \qquad \det(\underline{\underline{\mathbf{A}}}+\underline{\underline{\mathbf{B}}}) \neq \det\underline{\underline{\mathbf{A}}}+\det\underline{\underline{\mathbf{B}}}$$

$$\det(\alpha\underline{\underline{\mathbf{A}}}) = \alpha^n \det\underline{\underline{\mathbf{A}}}$$

4 Matrizes II

4.1 Matriz adjunto: $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^* = (A_{ij})^T$:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\underline{\mathbf{A}}}^* = \begin{pmatrix} \det\underline{\underline{\mathbf{A}}} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \det\underline{\underline{\mathbf{A}}} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \det\underline{\underline{\mathbf{A}}} \end{pmatrix}$$

4.1.1 Determinante do adjunto:

$$\det\underline{\underline{\mathbf{A}}}^* = (\det\underline{\underline{\mathbf{A}}})^{n-1}$$

4.2 Se $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ regular: $\det\underline{\underline{\mathbf{A}}} \neq 0$:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}\left(\frac{\underline{\underline{\mathbf{A}}}^*}{\det\underline{\underline{\mathbf{A}}}}\right) = \left(\frac{\underline{\underline{\mathbf{A}}}^*}{\det\underline{\underline{\mathbf{A}}}}\right)\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \underline{\underline{\mathbf{I}}}$$

4.2.1 Matriz inverso: $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} := \dfrac{\underline{\underline{\mathbf{A}}}^*}{\det\underline{\underline{\mathbf{A}}}}$:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \underline{\underline{\mathbf{I}}}$$

4.3 Posto de matriz $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, ρ_A: a dimensão do maior subdeterminante não-zero que pode ser selecionado de $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$.

4.3.1 O posto não muda fazendo operações de linha (coluna).

5 Sistemas Lineares

5.1 m equações com n incógnitas:

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & a_{12}x_2 & \ldots & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & a_{22}x_2 & \ldots & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & .. & \ldots & .. & & \\ a_{m1}x_1 & a_{m2}x_2 & \ldots & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right\}$$

5.1.1 Matriz coeficiente, $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

5.1.2 Matriz total (aumentada), $\underline{\underline{\mathbf{T}}}$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

5.1.3 Forma matricial:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}$$

5.2 Equação Homogênea:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}}$$

5.2.1 A Solução Completa do Equação Não-Homogênea é uma Solução Particular do Equação Não-Homogênea mais a Solução Completa do Equação Homogênea:

$$SCEH = SPEnH + SCEH$$

5.3 Classificação de Equações Lineares de ordem n:

$\rho_T > \rho_A$:	Incompatível	Nemhuma solução
$n = \rho = \rho_T = \rho_A$:	Compatível	Uma única solução
$n > \rho = \rho_T = \rho_A$:	Indeterminado	Uma $(n-\rho)$ infinidade de soluções

6 Espaços Vetoriais

6.1 $(V, +, *)$ é um Espaço Vetorial se:

6.1.1 Fechado sob adição:

$$\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}} \in V \Rightarrow \underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{v}} \in V$$

6.1.2 $+$ comutativa:

$$\underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{v}} + \underline{\mathbf{u}}$$

6.1.3 $+$ associativa:

$$\underline{\mathbf{u}} + (\underline{\mathbf{v}} + \underline{\mathbf{w}}) = (\underline{\mathbf{v}} + \underline{\mathbf{u}}) + \underline{\mathbf{w}}$$

6.1.4 $\exists!\ \underline{\mathbf{0}} \in V$, o vetor nula ou elemento neutro de $+$:

$$\underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{0}} = \underline{\mathbf{u}}$$

6.1.5 $\forall \underline{\mathbf{u}} :\ \exists!\ \underline{(-\mathbf{u})} \in V$, o vetor oposta:

$$\underline{\mathbf{u}} + (-\underline{\mathbf{u}}) = \underline{\mathbf{0}}$$

6.1.6 Fechado sob multiplicação com escalar, $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\underline{\mathbf{u}} \in V \wedge \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha\underline{\mathbf{u}} \in V$$

6.1.7 Distribuitividade:

$$\alpha(\underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{v}}) = \alpha\underline{\mathbf{u}} + \alpha\underline{\mathbf{v}}$$

6.1.8 Distribuitividade:

$$(\alpha+\beta)\underline{\mathbf{u}} = \alpha\underline{\mathbf{u}} + \beta\underline{\mathbf{u}}$$

6.1.9 $*$ associativa:

$$(\alpha\beta)\underline{\mathbf{u}} = \alpha(\beta\underline{\mathbf{u}})$$

6.1.10 1 elemento neutro de multiplicação com escalar:

$$1\underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{u}}$$

6.2 $U \subseteq V$ é um Subespaço Vetorial de V:

6.2.1 U fechado sob adição:

$$\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}} \in V \Rightarrow \underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{v}} \in V$$

6.2.2 U fechado sob multiplicação com escalar:

$$\underline{\mathbf{u}} \in V \wedge \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha\underline{\mathbf{u}} \in V$$

6.3 Combinação linear de m vetores, $\{\underline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{v}}_1\}$ em V:

$$c_1\underline{\mathbf{v}}_1 + \ldots + c_m\underline{\mathbf{v}}_m$$

6.4 Os vetores, $\{\underline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{v}}_1\}$ em V são linearmente dependentes, se:

$$\exists (c_1, \ldots, c_m) \neq (0, \ldots, 0): \quad c_1\underline{\mathbf{v}}_1 + \ldots + c_m\underline{\mathbf{v}}_m = \underline{\mathbf{0}}$$

6.4.1 $\{\underline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{v}}_1\}$ são linearmente independentes, se não for linearmente dependentes:

$$c_1\underline{\mathbf{v}}_1 + \ldots + c_m\underline{\mathbf{v}}_m = \underline{\mathbf{0}} \quad \Rightarrow \quad c_1 = \ldots c_m = 0$$

6.5 O conjunto gerado de $\{\underline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{v}}_m\}$:

$$span(\underline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{v}}_m) = \{c_1\underline{\mathbf{v}}_1 + \ldots + c_m\underline{\mathbf{v}}_m |\, c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{R}\}$$

6.5.1 Matriz com os vetores em colunas:

$$\underline{\underline{\mathbf{V}}} == \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ \underline{\mathbf{v}}_1 & \underline{\mathbf{v}}_2 & \cdots & \underline{\mathbf{v}}_m \\ | & | & \cdots & | \end{pmatrix}$$

6.5.2 Dimensão do $span(\underline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{v}}_m)$ é a quantia de vetores linearmente independentes:

$$dim\ span(\underline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{v}}_m) = \rho_V$$

6.5.3 Se $\rho_v = m$ dizemos que $\underline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{v}}_m$ constitui um base para $span(\underline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{v}}_m)$

6.5.4 Base canônica de $\mathbb{R}^n$:

$$\underline{\mathbf{e}}_1 = (1, 0, \ldots, 0)^T$$
$$\underline{\mathbf{e}}_2 = (0, 1, \ldots, 0)^T$$
$$\ldots$$
$$\underline{\mathbf{e}}_n = (0, 0, \ldots, 1)^T$$

6.5.5 Matriz convertendo coordenados do base novo ($\underline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{v}}_n$) à base antigo $\underline{\mathbf{e}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{e}}_n$:

$$\underline{\mathbf{u}}_e = \underline{\underline{\mathbf{V}}}\,\underline{\mathbf{u}}_v \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\mathbf{u}}_v = \underline{\underline{\mathbf{V}}}^{-1}\underline{\mathbf{u}}_e$$

7 Transformações Lineares

7.1 Transformação (aplicação) Linear:

$$f(\underline{\mathbf{v}}) = \underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\mathbf{v}}$$

7.2 Lineariedade do f:

$$f(\underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{v}}) = f(\underline{\mathbf{u}}) + f(\underline{\mathbf{v}})$$
$$f(\alpha\underline{\mathbf{u}}) = \alpha f(\underline{\mathbf{u}})$$

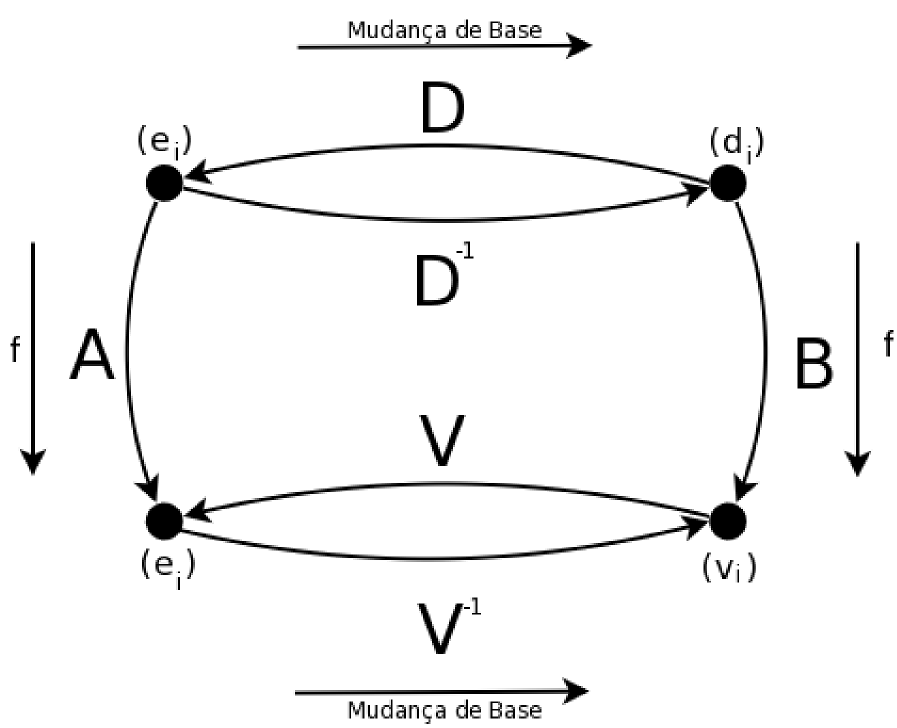
7.2.1 Se $\underline{\underline{\mathbf{A}}} \in M^{mn}$, $f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

7.2.2 A dimensão do imagem: o posto de $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$.

7.2.3 No coluna i do $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ está a imagem do vetor básico n^o i, $f(\underline{\mathbf{e}}_i)$.

7.3 Se $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ representa a aplicação f no base canônica, $(\underline{\mathbf{e}}_i)$, no base $(\underline{\mathbf{v}}_i)$ f é representado por:

$$\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{V}}}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\underline{\mathbf{V}}}$$



7.3.1 Matrizes, $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ e $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$, são ditos similares, se existe um matriz regular: $\underline{\underline{\mathbf{V}}}$, tal que: $\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{V}}}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{A}}}\underline{\underline{\mathbf{V}}}$.

7.3.2 Matrizes similares tem mesmo determinante.

7.3.3 Matrizes similares tem mesmo traço.

7.3.4 Matrizes similares tem mesmo posto.

7.3.5 Matrizes similares descreve a mesma aplicação linear em bases diferentes.

7.4 Teorema de Cayley-Hamilton: Por qualquer matriz quadrática, $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, com polinômio caraterístico $p(\lambda)$,vale: $p(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) = \underline{\underline{\mathbf{0}}}$.

8 Autovalor e Autovetor

8.1 $\underline{\mathbf{v}}$ é chamado autovetor de $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ com autovalor λ, se $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ quadrática e:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\mathbf{v}} = \lambda\underline{\mathbf{v}}$$

8.1.1 Polinomio caraterística do $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$:

$$P(\lambda) = \det(\underline{\underline{\mathbf{A}}} - \lambda\underline{\underline{\mathbf{I}}})$$

8.1.2 Os possíveis autovalores do $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ são os raízes do $P(\lambda)$.

8.2 Autovetores de autovalores diferentes são linearmente independentes.

8.2.1 $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ possui no máximo n autovalores reais (contado com multiplicidade).

8.2.2 $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ possui no máximo n autovetores linearmente independentes.

8.3 $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ simétrica:

8.3.1 $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ possui n autovalores (contado com multiplicidade).

8.3.2 Existe um base de autovetores de $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$.

8.3.3 Autovetores de autovalores diferentes são ortogonais.

8.3.4 Podemos escolher uma base de autovetores ortonormais, isto é ortogonais e normalizados.

8.4 Um matriz quadrática é dito ortogonal, se o base no suas colunas (ou linhas) são ortonormais.

8.4.1 Por um matriz ortogonal, $\underline{\underline{\mathbf{V}}}$: $\underline{\underline{\mathbf{V}}}^{-1} = \underline{\underline{\mathbf{V}}}^{T}$.

8.4.2 Por um matriz ortogonal, $\underline{\underline{\mathbf{V}}}$: $\det\underline{\underline{\mathbf{V}}} = \pm 1$.

9 Diagonalização de Matrizes

9.1 Se por aplicação linear, $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, existe um base de autovetores, $\underline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{v}}_n$, com autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, dizemos que $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ é diagonalizável, e o matriz neste base e:

$$\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

9.1.1 Se $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ e simétrica $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ é diagonalizável e existe um base ortonormal de autovetores.

9.2 Polinômio homogêneo de segundo grau:

$$F(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz = (x,y,z)\begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{v}}^T\, \underline{\underline{\mathbf{A}}}\, \underline{\mathbf{v}}$$

Com $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ simétrica.

9.2.1 Com substituição ortogonal, $\underline{\mathbf{v}} = \underline{\underline{\mathbf{V}}}\, \underline{\mathbf{v}}'$, $F(x,y,z)$ é transformado em:

$$F(x,y,z) = F'(x',y',z') = \lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \lambda_3(z')^2$$

10 Produtos Internos

10.1 $<\underline{\mathbf{u}},\underline{\mathbf{v}}>\in \mathbb{R}$ é chamado um produto interno, se:

$$<\underline{\mathbf{u}},\underline{\mathbf{v}}>=<\underline{\mathbf{v}},\underline{\mathbf{u}}>$$
$$<\underline{\mathbf{u}},\underline{\mathbf{v}}+\underline{\mathbf{w}}>=<\underline{\mathbf{u}},\underline{\mathbf{v}}>+<\underline{\mathbf{u}},\underline{\mathbf{w}}>$$
$$<\alpha\underline{\mathbf{u}},\underline{\mathbf{v}}>=\alpha<\underline{\mathbf{u}},\underline{\mathbf{v}}>$$
$$<\underline{\mathbf{u}},\underline{\mathbf{u}}>\geq 0$$
$$<\underline{\mathbf{u}},\underline{\mathbf{u}}>=0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\mathbf{u}}=\underline{\mathbf{0}}$$

10.1.1 O produto escalar em $\mathbb{R}^n$ é um produto interno:

$$<\underline{\mathbf{u}},\underline{\mathbf{v}}>=u_1v_1+\ldots+u_nv_n$$

10.1.2 Forma bilinear: $F(\underline{\mathbf{u}},\underline{\mathbf{v}}) = \underline{\mathbf{u}}^T\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\mathbf{v}}$ é um produto interno, se $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ é positivamente definito:

$$\underline{\mathbf{u}}^T\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\mathbf{u}} \geq 0, \quad \forall \underline{\mathbf{v}} \in V$$

10.1.3 Uma forma bilinear é positivamente definito se e somente se, todos os autovalores do $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ são positivos. Neste caso, num base de autovetores ortonormais:

$$F(\underline{\mathbf{u}}',\underline{\mathbf{v}}') = \lambda_1 u_1' v_1' + \ldots + \lambda_n u_n' v_n'$$

10.1.4 Produto interno entre funções:

$$<f,g>=\int_I f(t)g(t)dt$$

10.1.5 Norma induzida por produto interno, $<\underline{\mathbf{u}},\underline{\mathbf{v}}>$:

$$||\underline{\mathbf{u}}||^2=<\underline{\mathbf{u}},\underline{\mathbf{u}}>$$

10.1.6 Desigualdade Cauchy-Schwarz:

$$<\underline{\mathbf{u}},\underline{\mathbf{v}}>\leq ||\underline{\mathbf{u}}||||\underline{\mathbf{v}}||$$

10.1.7 Desigualdade Triangular:

$$||\underline{\mathbf{u}}+\underline{\mathbf{v}}|| \leq ||\underline{\mathbf{u}}||+||\underline{\mathbf{v}}||$$

11 Classificação de Formas Quadráticas

11.1 $\mathbb{R}^2$:

11.1.1 Elipse, centro $C(x_0, y_0)$, semi-eixos a, b:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

11.1.2 Hipérbola, centro $C(x_0, y_0)$, semi-eixos a, b, 'abraçando' $x = x_0$:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

11.1.3 Hipérbola, centro $C(x_0, y_0)$, semi-eixos a, b, 'abraçando' $y = y_0$:

$$-\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

11.1.4 Assintodas da hipérbola:

$$\frac{(x-x_0)}{a} = \pm\frac{(y-y_0)}{b}$$

11.1.5 Parábola, vertex $C(x_0, y_0)$, 'abraçando' $y = y_0$:

$$y - y_0 = a(x-x_0)^2$$

11.2 $\mathbb{R}^3$:

11.2.1 Elipsóide, centro $C(x_0, y_0, z_0)$, semi-eixos a, b, c:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1$$

11.2.2 Hiperbolóide 1 folha, centro $C(x_0, y_0, z_0)$, semi-eixos a, b, c:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1$$

Eixo principal: $(x, y, z)^T = (x_0 + t, y_0 + t, z_0)^T, \ \ t \in \mathbb{R}$.

11.2.3 Hiperbolóide 2 folhas, centro $C(x_0, y_0, z_0)$, semi-eixos a, b, c:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1$$

Eixo principal: $(x, y, z)^T = (x_0 + t, y_0 + t, z_0)^T, \ \ t \in \mathbb{R}$.

11.2.4 Cone quádrico, centro (x_0, y_0, z_0), semi-eixos a, b, c:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 0$$

11.2.5 Parabolóide eliptica, centro (x_0, y_0, z_0), semi-eixos a, b:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = z - z_0$$

11.2.6 Parabolóide hiperbólica, centro (x_0, y_0, z_0), semi-eixos a, b:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = z - z_0$$

11.3 Eliminação dos termos mistos, $\underline{\mathbf{r}} = (x, y, z)^T$:

11.3.1 Forma quadrática:

$$F_2(x,y,z) + F_1(x,y,z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$$

$$F_2(x,y,z) = \underline{\mathbf{r}}^T \underline{\underline{\mathbf{A}}}\underline{\mathbf{r}}, \qquad \underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{pmatrix}$$

$$F_1(x,y,z) = \underline{\mathbf{b}}^T \underline{\mathbf{r}}, \qquad \underline{\mathbf{b}} = (\alpha, \beta, \gamma)^T$$

11.3.2 Existe uma base *ortonormal* de autovetores para $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\mathbf{v}}_i = \lambda_i \underline{\mathbf{v}}_i$$

11.3.3 Substituição ortogonal, $\underline{\underline{\mathbf{V}}}^{-1} = \underline{\underline{\mathbf{V}}}^T$:

$$\underline{\underline{\mathbf{V}}} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \underline{\mathbf{v}}_1 & \underline{\mathbf{v}}_2 & \underline{\mathbf{v}}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix},$$

11.3.4 Transformação de F_2:

$$\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{V}}}^T\,\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\underline{\mathbf{V}}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$$F_2(x,y,z) = F_2'(x',y',z') = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2$$

11.3.5 Transformação de F_1:

$$\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{V}}}^T\,\underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\underline{\mathbf{V}}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$$F_1(x,y,z) = F_1'(x',y',z') = \underline{\mathbf{b}}^T \underline{\underline{\mathbf{V}}}\underline{\mathbf{r}}' = (\underline{\underline{\mathbf{V}}}^T \underline{\mathbf{b}})^T \underline{\mathbf{r}}'$$